

Tiažové zrýchlenie Zeme

Tiažový potenciál v ľubovoľnom bode na povrchu Zeme

$$W(r, \varphi, \lambda) = W_0 = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(A - C)(3\sin^2 \varphi - 1) + \frac{\omega^2}{2}r^2 \cos^2 \beta$$

- W tiažový potenciál
- A, C momenty zotrvačnosti, vzhľadom k osiam x, y, z
- r vzdialenosť bodu na hladinovej ploche od stredu Zeme

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- M hmotnosť Zeme
- G gravitačná konštanta ($6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$)
- ω uhlová rýchlosť otáčania Zeme ($7,292115147 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
- β geocentrická šírka

Momenty zotrvačnosti

- Vyjadrujú kinetickú energiu otáčavého pohybu telesa
- Všeobecný vzorec pre moment zotrvačnosti hmotného bodu

$$I = m.r^2$$

- Kinetická energia otáčavého hmotného bodu

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

$$A = \int_V m (z^2 + y^2)$$

$$C = \int_V m (x^2 + y^2)$$

Vzdialenosť bodu od stredu Zeme:

$$r = a - \left(3 \underbrace{\frac{(C-A)}{2a^2M}}_p + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\omega^2 a^3}{GM}}_q \right) a \sin^2 \psi$$
$$r = a - \underbrace{\left(3p + \frac{q}{2} \right)}_i a \sin^2 \psi$$

Sploštenie elipsoidu:

$$i = 3p + \frac{q}{2} \qquad i = \frac{3(C-A)}{2a^2M} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM}$$

Substitúcie:

$$\frac{C-A}{2a^2M} = p \qquad \frac{\omega^2 a^3}{GM} = q$$

Tiažové zrýchlenie ľubovoľného bodu na geoide

$$g = -\frac{\partial W}{\partial r} = G \frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{3}{2r^2 M} (C - A) \right) (1 - 3 \sin^2 \psi) - \frac{\omega^2 r^3}{GM} \cos^2 \psi$$

Dosadíme za r :

$$r = a - \left(3p + \frac{q}{2} \right) a \sin^2 \psi$$

a dostaneme pre ľubovoľný bod na geoide tiažové zrýchlenie

$$g = G \frac{M}{a^2} (1 + 3p - q) (1 + (2q - 3p) \sin^2 \psi)$$

Clairautov teorém

- Tiažové zrýchlenie na rovníku ($\psi=0$)

$$g_e = G \frac{M}{a^2} (1 + 3p - q)$$

- Nahradenie φ za ψ (líšia sa maximálne na 45° rovnobežke o $11,6'$)

$$\beta = 2q - 3p \qquad p = \frac{i - \frac{q}{2}}{3} \qquad \beta = \frac{5}{2}q - i$$

- Tiažové zrýchlenie v ľubovoľnom bode (Clairautov teorém)

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi)$$

Tiažové zrýchlenie na póle ($\varphi=90^\circ$)

$$g_p = g_e(1 + \beta)$$

$$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e}$$

- Pomer odstredivej sily a tiažového zrýchlenia na rovníku

$$q = \frac{a\omega^2}{g_e}$$

Výpočet sploštenia

- Pre výpočet sploštenia i sa určí veľká poloos a zo stupňových meraní, z astronomických meraní ω a z gravimetrických meraní g_e a β

$$\beta = \frac{5}{2}q - i$$

$$i = \frac{5}{2}q - \beta$$

Skutočné tiažové zrýchlenie

- Spôsobené skutočným tiažovým poľom Zeme
- Merané gravimetrickými prístrojmi:
- **Kyvadlové merania**
 - pôvodné merania využívali dobu kyvu vhodného kyvadla
- Merania využívajúce voľný pád
 - presnejšie
- **Absolútne merania**
 - hodnota tiažového zrýchlenia na bode
- **Relatívne merania**
 - určujú sa rozdiely tiažových zrýchlení medzi tiažovými bodmi
 - pripočítavajú sa relatívne hodnoty

Absolútny bod

- Svetový základný tiažový bod v Postupimi
 - $\varphi_p = 52^{\circ}22,86'$
 - $\lambda_p = 13^{\circ}04,06'$
 - výška nad morom $H_p = 87$ m
 - $g_p = 9,812\,600\text{ m.s}^{-2} \pm 30\text{ }\mu\text{m.s}^{-2}$
- R. 1978 bod s absolútnou tiažou Pecný u Prahy a v Žiline

- Tiažové zrýchlenie na povrchu (Newtonov gravitačný zákon)

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

- Tiažové zrýchlenie nad povrchom vo výške H:

$$g_P = G \frac{M}{(r+H)^2} = G \frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{H}{r}\right)^{-2}$$

- Binomický rozvoj druhého člena

$$g_P \approx G \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2H}{r} - \frac{3H^2}{r^2}\right)$$

- Redukcia z vplyvu výšky bodu

$$\delta_H = g - g_P = G \frac{M}{r^2} \left(\frac{2H}{r} - \frac{3H^2}{r^2} \right)$$

$$\boxed{\delta_H = g \frac{2H}{r} \left(1 - \frac{3H}{2r}\right)}$$

Aplikácia Fayovej redukcie

- Veľkosť g závisí od zemepisnej šírky
- Dosadením priemernej hodnoty normálneho tiažového zrýchlenia $9,81033 \text{ m.s}^{-2}$ a $R=6371200 \text{ km}$ pre $\varphi=47^{\circ}30'$ do $\varphi=51^{\circ}30'$ dostaneme Fayovu redukciu

$$\delta_H = \left(+ 3,080H - 0,0000007H^2 \right) \mu\text{m.s}^{-2}$$

- Druhý člen rovnice sa uplatní pre výšky nad 2500 m ($5\mu\text{m.s}^{-2} = 0,5\text{mgal}$)

Helmertov vzorec pre Fayovu redukciu

$$\delta_H = (+ 0,3086 H + 0,00071 H \cos 2\varphi) \text{ mgal}$$

- pre $H < 2500 \text{ m}$ $\delta H < 0,3 \text{ mgal}$, preto sa druhý člen zanedbáva a zostáva

$$\delta_H = +3,086 H \text{ } \mu \text{ m.s}^{-2}$$

- Ak sa zmení nadmorská výška o 1 m, zmení sa tiažové zrýchlenie o $3 \text{ } \mu \text{ m.s}^{-2}$ (0,3 mgal)
- So vzrastajúcou výškou sa tiažové zrýchlenie znižuje

Prevody tiažových zrýchlení

- Odmerané tiažové zrýchlenie sa redukuje z vplyvu výšky na nulovú hladinu

$$g_0 = g + \delta_H$$

- Normálne tiažové zrýchlenie sa prenesie z elipsoidu do bodu s nadmorskou výškou H

$$\gamma = \gamma_0 - \delta_H$$

- Spôsob regularizácie Zeme (tiažové zrýchlenie g v bode P je ovplyvnené príťažlivosťou hmôt medzi geoidom a povrchom, prevodom do P_0 sa tieto hmoty „premiestňujú“ pod povrch geoidu