

ANOMÁLIE TIAŽOVÉHO POLA



Anomália tiaže a porucha tiaže

Rozdiel medzi tiažovým zrýchlením na geoide a na referenčnom elipsoide sa nazýva **anomália tiaže**

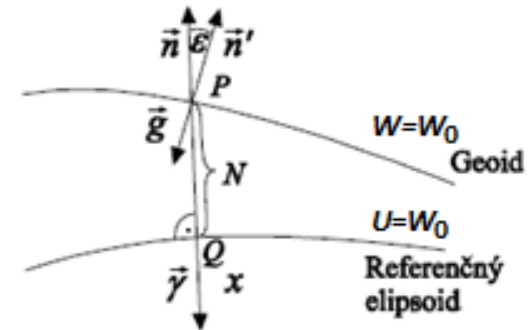
$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

Rozdiel medzi tiažovým zrýchlením a normálnym tiažovým zrýchlením na geoide v rovnakom bode definujeme ako **porucha tiaže**

$$\delta g = g_P - \gamma_P$$

Porucha nebola v geodézii doteraz tak využívaná ako anomália tiaže. Až aplikácia globálnych satelitných systémov rozšírila možnosti jej merania a aplikácie.

Výhody tiažovej anomálie sú v možnosti priameho merania tiažového zrýchlenia a jeho redukcie na geoid a jednoduchého výpočtu normálneho tiažového zrýchlenia na definovanom elipsoide



Porucha tiaže a Brunsov vzorec

Malý rozdiel medzi tiažovým potenciálom na geoide v bode P a normálnym tiažovým potenciálom v bode Q na elipsoide sa nazýva anomálny alebo **poruchový potenciál** (disturbing potential)

$$T = W - U$$

Vzdialenosť medzi bodom P ležiacom na geoide a bodom Q na elipsoide sa nazýva výška geoidu alebo **geoidická undulancia N**

Normálny tiažový potenciál v bode P získame jeho derivovaním po normále

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_Q N = U_Q - \gamma N \quad W_P = U_P + T_P = U_Q - \gamma N + T_P$$

Pri porovnaní geoidu a referenčného elipsoidu s rovnakým potenciálom v bodoch P a Q platí

$$W_0 = U_0 = W_P = U_Q$$

Potom môžeme napísať pre výšku geoidu **Brunsov vzorec**

$$0 = -\gamma N + T_P$$

$$N = \frac{T}{\gamma}$$



Gradient poruchového potenciálu

Porucha tiaže sa rovná gradientu poruchového potenciálu

$$\delta g = \text{grad}(W - U) = \text{grad } T = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Ak zanedbáme malý rozdiel smerov obidvoch zvislíc a pretože je smer normály skoro zhodný so smerom prevýšenia platí

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial n} \approx -\frac{\partial U}{\partial n'} \approx -\frac{\partial U}{\partial h} \quad g = -\frac{\partial W}{\partial n} \approx -\frac{\partial W}{\partial h}$$

Vzťahy dosadíme do poruchy tiaže

$$\delta g = g_P - \gamma_P = -\frac{\partial W}{\partial h} - \left(-\frac{\partial U}{\partial h} \right) = -\frac{\partial}{\partial h}(W - U) = -\frac{\partial T}{\partial h}$$

Vyjadríme normálne tiažové zrýchlenie v bode P

$$\gamma_P = \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N$$



Základná rovnica fyzikálnej geodézie

a dosadíme ho do poruchy tiaže

$$\delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N$$

Dosadíme anomáliu tiaže

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N$$

a výšku geoidu vyjadríme Brunsovým vzťahom

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T$$

Dostaneme **základnú rovnicu fyzikálnej geodézie**, ktorá vyjadruje vzťah medzi meranou hodnotou tiaže a neznámym poruchovým potenciálom

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g = 0$$

Pretože anomáliu tiaže poznáme len na povrchu geoidu, nazýva sa rovnica aj tretia okrajová úloha



Sférická aproximácia základnej rovnice

Ak zanedbáme sploštenie elipsoidu, dopustíme sa chyby v určení výšky geoidu maximálne 0.3 m. Potom môžeme z Newtonovho zákona napísať

$$\gamma = \frac{GM}{r^2}$$

Derivácia vzťahu sa rovná

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3}$$

Dosadením oboidvoch vzťahov do základnej fyzikálnej rovnice dostaneme

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{r^2}{GM} \left(-2 \frac{GM}{r^3} \right) T + \Delta g = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{2}{r} T + \Delta g = 0$$

Pretože normála na sfére má rovnaký smer ako sprievodič bodu (polomer) platia rovnaké aproximácie

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial r}$$



Tretia okrajová úloha na sfére

Zavedieme polomer gule R a dostaneme sférickú aproximáciu **tretej okrajovej podmienky**

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r}T + \Delta g = 0$$

Riešenie sférickej aproximácie tretej okrajovej podmienky je užitočné len pri malých hodnotách parametrov rovnice, pretože Zem je v geometrickom zmysle elipsoid

Ak by sme poznali skutočné tiažové zrýchlenie v celom priestore, základnú rovnicu fyzikálnej geodézie riešime ako každú diferenciálnu rovnicu. Keďže ho poznáme len na povrchu, základná fyzikálna rovnica sa používa ako tretia okrajová podmienka, ktorá sama o sebe nie je postačujúca pre určenie poruchového potenciálu



Rozvoj poruchového potenciálu do sférickej harmonickej funkcie

Ďalším predpokladom pre riešenie rovnice je neexistencia hmoty nad geoidom (medzi povrchom Zeme a geoidom), pretože nevieme určiť tiažové zrýchlenie na povrchu geoidu.

Do výpočtov sa zavádzajú rôzne korekcie pre odstránenie hmôt nad geoidom. V prípade, že uvažujeme že hustota hmôt nad geoidom je rovná nule, poruchový potenciál je harmonická funkcia a riešime ju Laplaceovou rovnicou

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Pretože vektor poruchového potenciálu je harmonická funkcia, môžeme ju rozvinúť do radu sférických funkcií

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda)$$



Laplaceova povrchová funkcia

$T_n(\vartheta, \lambda)$ je Laplaceova povrchová funkcia odvodená ako $Y_n(\vartheta, \lambda)$

$$T_{ni}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda$$

$$T_{ne}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda$$

Deriváciou poruchového potenciálu vyjadríme poruchu tiaže

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda) \right)$$

$$\delta g = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda)$$

Dosadením poruchy tiaže a poruchového potenciálu do základnej fyzikálnej rovnice na sfére

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda) - \frac{2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda)$$

Dostaneme anomáliu tiaže

$$\Delta g = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-2) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda)$$



Rozvoj anomálie tiaže do radu sférických funkcií

Ak $r=R$ dostaneme anomáliu tiaže na povrchu Zeme

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda)$$

Rozvinieme anomáliu tiaže do radu Laplaceových sférických súradníc

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(r, \vartheta, \lambda)$$

Spojením rovníc dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R} (n-1) T_n(\vartheta, \lambda)$$

Takže pre poruchový potenciál platí

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\vartheta, \lambda) = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \Delta g_n(r, \vartheta, \lambda)$$

Aby rovnica mala reálny základ musí harmonický rad začínať od druhého stupňa



Stokesova funkcia

Vyjadríme poruchový potenciál pomocou radu sférických funkcií

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \right) \Delta g \, d\sigma$$

pričom výraz v zátvorke je **Stokesova funkcia**
v tvare Legendrových polynómov

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi)$$

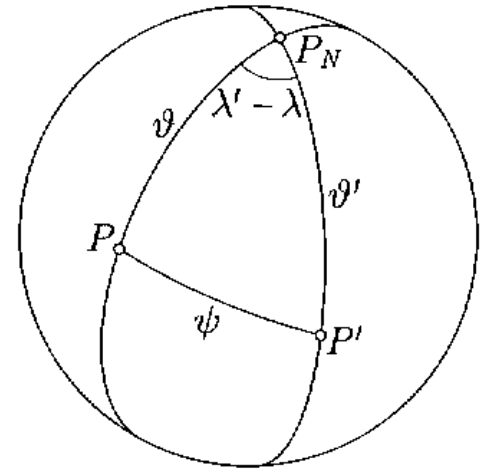
Spätným dosadením súradníc bodu na sfére

$$\iint_{\sigma} \dots d\sigma \rightarrow \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \dots \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'$$

$$d\sigma = \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'$$

dostaneme poruchový potenciál pre bod P'

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \Delta g(\vartheta', \lambda') S(\psi) \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'$$



Výpočet odl'ahlosti geoidu pomocou Stokesovej funkcie

Podľa Brunsovho vzťahu pre odl'ahlosť geoidu platí

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \Delta g(\vartheta', \lambda') S(\psi) \sin \vartheta' d\vartheta' d\lambda'$$

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma$$

Iný tvar Stokesovej funkcie

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right)$$

Stokesov vzorec, alebo Stokesov integrál je najdôležitejší vzťah vo fyzikálnej geodézii, pretože umožňuje určenie geoidu z gravimetrických údajov, na základe výpočtu jeho odl'ahlosti, ktorá predstavuje vzdialenosť geoidu a elipsoidu (geoidická undulácia) a výpočet poruchového potenciálu kdekoľvek na Zemi

Stokesov vzorec je založený na sférickej aproximácii vzorcov, preto pri výpočtoch treba počítať s presnosťou určenia výšky geoidu v niektorých miestach Zeme do 1 metra

