

NEBESKÁ MECHANIKA

Nebeská mechanika sa venuje pohybu planét a jeho fyzikálnym zákonitostiam v heliocentrickej sústave

Elipsa

E, F - ohniská elipsy

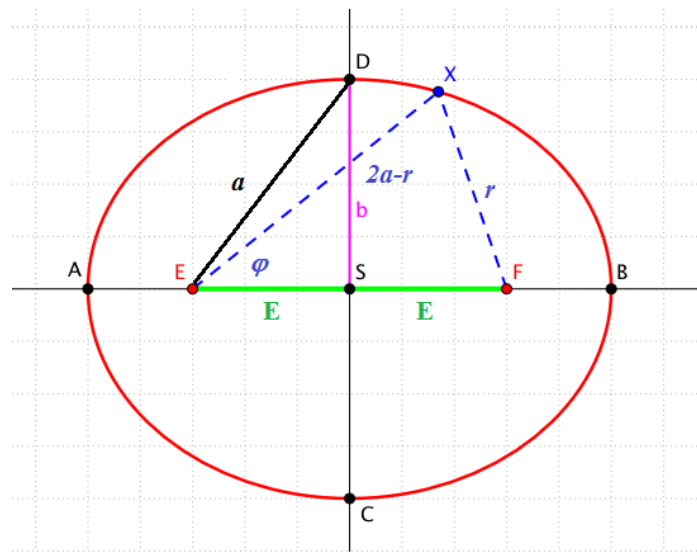
E lineárna excentricita

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Súčet dĺžok sprievodičov

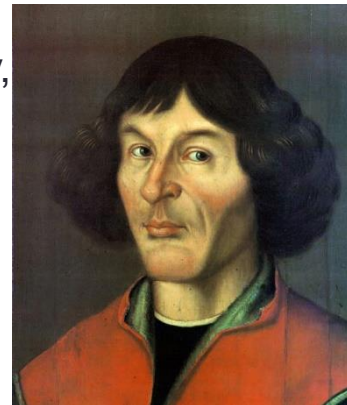
$$|XE| + |XF| = 2a$$

Dĺžka ED sa rovná veľkej polosi



Geocentrizmus verzus heliocentrizmus

- Aristoteles (384 BC – 322 BC)
Tuhé telesá padajú dolu, pretože prirodzené miesto živlu Zeme je dolu, v strede sveta, a iskry letia nahor, pretože prirodzené miesto ohňa je na nebi.“
- Ptomelaios (85 -165)
- Mikuláš Kopernik (1473-1543)
Zaviedol kinematickú schému slnečnej sústavy, ktorá sa stala začiatkom vývinu nebeskej mechaniky
- Johannes Kepler (1571 – 1630)
Eliptická obežná dráha okolo Slnka
- Giordano Bruno (1548 – 1600)
Zem ani Slnko nie sú stredom vesmíru



Johannes Kepler (1571,1630)

Nemecký astronóm, fyzik, optik a matematik sformuloval tri zákony na základe pozorovaní svojho učiteľa Tycho de Brahe planéty Mars:

- Prvý Keplerov zákon
- Druhý Keplerov zákon
- Tretí Keplerov zákon



Prvý Keplerov zákon

Opravuje Kopernikovu teóriu o pohybe planét po kruhových dráhach:

Planéty sa pohybujú okolo Slnka po elipse

Rovnica sprievodiča planéty $(2a - r)^2 = 4E^2 + r^2 - 4Er \cos \varphi$

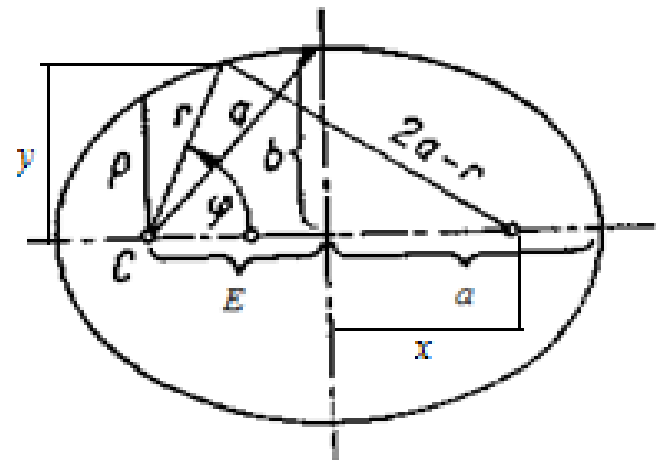
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi}$$

Lineárna a numerická excentricita

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \frac{E}{a}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$



Druhý Keplerov zákon

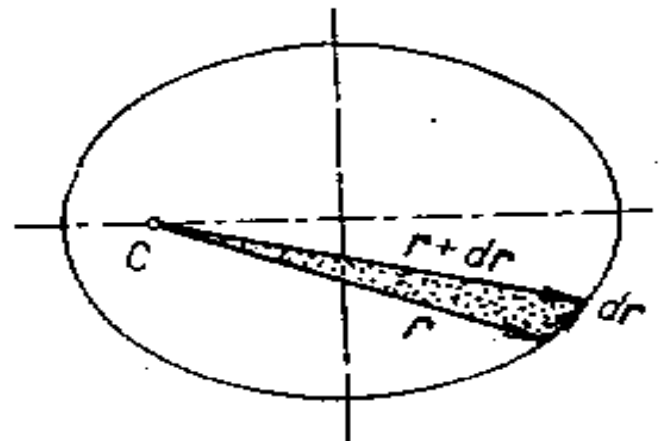
Plochy opísané sprievodičom za rovnaký čas sú rovnaké

Plošná rýchlosť je definovaná ako obsah plochy opísanej sprievodičom za jednotku času

$$\frac{dS}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \omega_s = \textit{konšt.}$$

Uhlová rýchlosť je definovaná prírastkom stredového uhla v čase

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_s}{r^2}$$



Tretí Keplerov zákon

Pomer druhých mocnín periód obehu dvoch planét sa rovná pomeru tretích mocnín ich hlavných polos

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

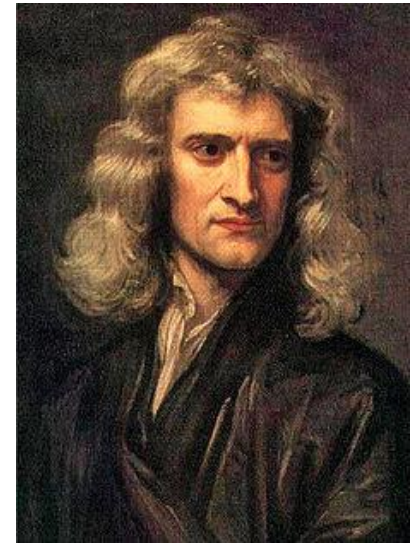
a druhý zápis definuje pomer druhej mocniny periódy jednej planéty a tretej mocniny jej polosí v tvare:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

ZEMSKÁ MECHANIKA

Zaoberá sa mechanickým pohybom telies realizovaným v geocentrickej sústave, teda vzájomnými zmenami polohy Zeme a iných telies a príčinami a silovými účinkami tohto pohybu

Issac Newton (1643, 1727)



Anglický fyzik, matematik a filozof

Položil základy pre modernú fyziku

Dynamické účinky sily sú odvodené z jeho pohybových zákonov

- Zákon zotrvačnosti
- Zákon sily

Vypočítal pohyby planét, presné termíny zatmenia Slnka a Mesiaca a čas návratu niektorých komét

Dokázal, že sila, ktorá spôsobuje pohyb planét okolo Slnka je tá istá, ako sila, ktorá spôsobuje, že padáme zo schodov.

Dynamika hmotného bodu

Pohybové rovnice reprezentujú zákon sily, vzťahnutý k trojrozmernej pravouhlej sústave rovníc

$$ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2} = F \quad \left\{ \begin{array}{l} ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \\ ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y \\ ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \end{array} \right.$$

$a_x, a_y, a_z, F_x, F_y, F_z$ predstavujú priemety vektora zrýchlenia a sily do zvolenej karteziánskej sústavy

Dráhový účinok sily

Elementárna práca dA je účinok gravitačnej sily po dráhe dr , ktorú prejde sprievodič

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{r} = m d\mathbf{a} d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = m d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

Kinetická energia bodu je skalárna veličina

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Dostredivé zrýchlenie

Pre dostredivé zrýchlenie platí rovnica, ktorá po dosadení obvodovej rýchlosti hmotného bodu

$$v = r\omega$$

má tvar

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

kde pre uhlovú rýchlosť kruhového pohybu platí

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Dosadením kvadrátu periódy z Tretieho Keplerovho zákona

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

a nahradením veľkej polosi eliptickej dráhy polomerom kruhovej dráhy dostaneme pre dostredivé zrýchlenie vzorec:

$$a_n = \frac{GM}{r^2}$$

Podľa princípu akcie a reakcie je sila, ktorou pôsobí Zem na planétu s hmotnosťou m úmerná sile, ktorou pôsobí planéta na Zem o hmotnosti M

$$\mathbf{F} = am = G \frac{Mm}{r^2}$$

kde G je gravitačná konštanta a M je hmotnosť Zeme

$$G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Časový účinok sily

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = m d\mathbf{v} = \mathbf{F} dt$$

Integráciou rovnice od okamžiku, kedy začala sila na hmotný bod pôsobiť do okamžiku, kedy silové pôsobenie skončilo dostaneme vektorovú veličinu nazvanú **impulz sily**

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

Intenzita gravitačného poľa

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Tiažové pole

Priestor pri povrchu Zeme, v ktorom sa prejavujú účinky tiažovej sily sa nazýva tiažové pole

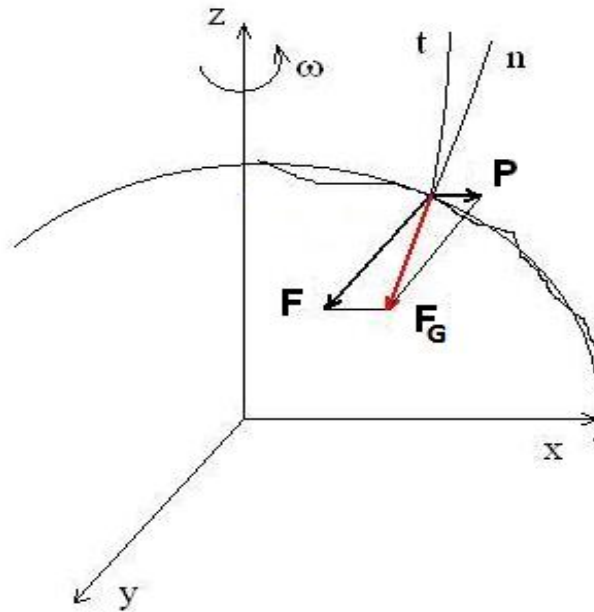
Silové účinky pôsobiace v tiažovom poli vznikajú vplyvom príťažlivej, teda gravitačnej sily a odstredivej sily, ktorých vektorový súčet tvorí tiažová sila

Tiažové pole Zeme je vektorové pole, ktoré sa teoreticky dá popísať merateľným vektorom tiažového zrýchlenia

Tiaž a tiažová sila

Tiažová sila vzniká pôsobením tiažového poľa Zeme na dané teleso

Tiaž telesa sa prejavuje ako tlaková sila pôsobiaca na vodorovnú podložku



$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F} + \mathbf{P}$$

Newtonov gravitačný zákon

Sila vzájomného pôsobenia akýchkoľvek dvoch telies je priamo úmerná súčinu ich hmotnosti a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2}$$

Gravitačná sila leží na spojnici priťahovaného hmotného bodu a smeruje do ťažiska (centrum síl, barycentrum)
Zeme

Gravitačný potenciál

Potenciálna energia gravitačného poľa sa rovná práci, ktorú musí vykonať vonkajšia sila pri premiestnení objektov konštantnou rýchlosťou, z nekonečnej do konečnej vzájomnej vzdialenosti

$$W_p = \mathbf{F}r = G \frac{mM}{r}$$

Potenciál gravitačného poľa je definovaný podielom potenciálnej energie a hmotnosti hmotnej častice:

$$V = \frac{W_p}{m} = \frac{GM}{r}$$

Odstredivá sila

Vplyvom rotácie Zeme pôsobí na objekty aj odstredivá sila

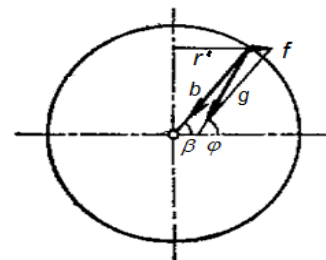
Odstredivá sila patrí medzi sily zotrvačné

Pôsobí na hmotný bod a udeľuje mu odstredivé zrýchlenie rovnajúce sa zmene obvodovej rýchlosti $d\mathbf{v}$ v čase dt

$$\mathbf{P} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{f}$$

Veľkosť odstredivej sily

$$P = \frac{mv^2}{r'} = mr'\omega^2$$



Odstredivý potenciál

Podobne ako je gravitačný potenciál definovaný pomocou potenciálnej energie, odstredivý potenciál je definovaný pomocou **kinetickej energie**

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Potom pre odstredivý potenciál možno napísať:

$$\Phi = \frac{W_k}{m} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{m} = \frac{1}{2}v^2$$

Vyjadrenie odstredivého potenciálu

Pomocou geocentrickej šírky:

Kinetická energia

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Obvodová rýchlosť

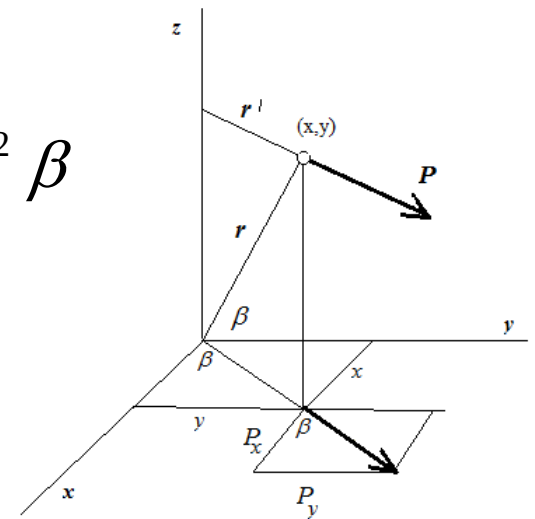
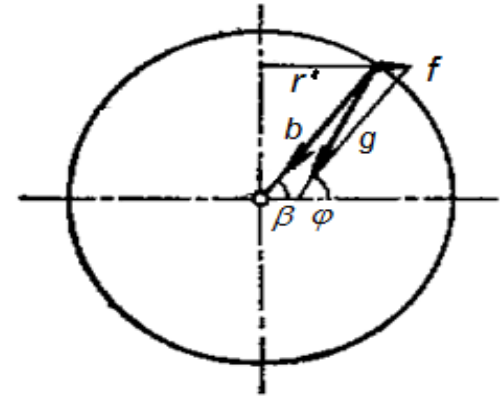
$$v = \omega \cdot r' = \omega r \cos \beta$$

Odstredivý potenciál

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \beta$$

V pravouhlej sústave:

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$



Tiažový potenciál

Potenciál príťažlivej sily – gravitačný:

$$V = G \int \frac{dm}{r}$$

Potenciál odstredivej sily - odstredivý

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

Potenciál tiažovej sily – energia poľa

$$W = V + \Phi$$

$$W = G \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

Gravitačné zrýchlenie

Gravitačné zrýchlenie telesa v gravitačnom poli Zeme nezávisí od jeho hmotnosti a jeho matematické vyjadrenie je totožné s vyjadrením **intenzity gravitačného poľa** Zeme

$$K = \frac{F}{m} = \frac{G \frac{mM}{r^2}}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

Druhý Newtonov gravitačný zákon vyjadrený vzorcom:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{-G \frac{mM}{r^2}}{m} = -G \frac{M}{r^2}$$

Odstredivé zrýchlenie

Vektor odstredivého zrýchlenia má smer odstredivej sily a teda je kolmý na rotačnú os Zeme

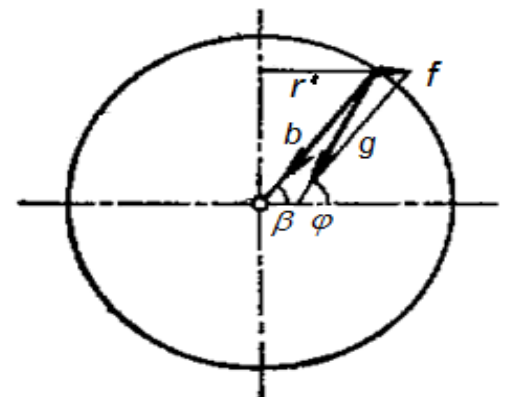
$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{r}'\omega^2$$

r' je vzdialenosť hmotného bodu od rotačnej osi (polomer rovnobežky)

$$r' = r \cos \beta$$

Veľkosť odstredivého zrýchlenia

$$f = r'\omega^2 = r\omega^2 \cos \beta$$



Odstredivé zrýchlenie na rovníku

Odstredivé zrýchlenie je najväčšie na rovníku, kde je jeho veľkosť vzhľadom na uhlovú rýchlosť rotácie Zeme a polomer rovníka rovná hodnote:

$$f_e = \omega^2 r_e = 0.034 \text{ m.s}^{-2}$$

Uhlová rýchlosť rotácie Zeme

$$\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

Zrýchlenia v tiažovom poli Zeme

Gravitačné
zrýchlenie

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2}$$

Odstredivé
zrýchlenie

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{P}}{m} = r\omega^2 \cos \beta$$

Tiažové
zrýchlenie

$$\mathbf{g} = \mathbf{b} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{b} = \text{grad } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \text{grad } \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \text{grad } W = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix}$$