

POTENCIÁL HOMOGENNEJ GULE

Zjednodušenie Newtonovho zákona

m_1 hmotnosť priťahujúceho telesa so súradnicami ξ, η, ζ

m_2 hmotnosť priťahovaného telesa so súradnicami x, y, z

Pre zjednodušenie výpočtov hmotnosť hmotného bodu $m_2=1$
a hmotnosť priťahujúceho telesa $m_1=m$

Potom F predstavuje gravitačnú silu vyvolanú telesom s hmotnosťou m , ktoré priťahuje hmotný bod s jednotkovou hmotnosťou

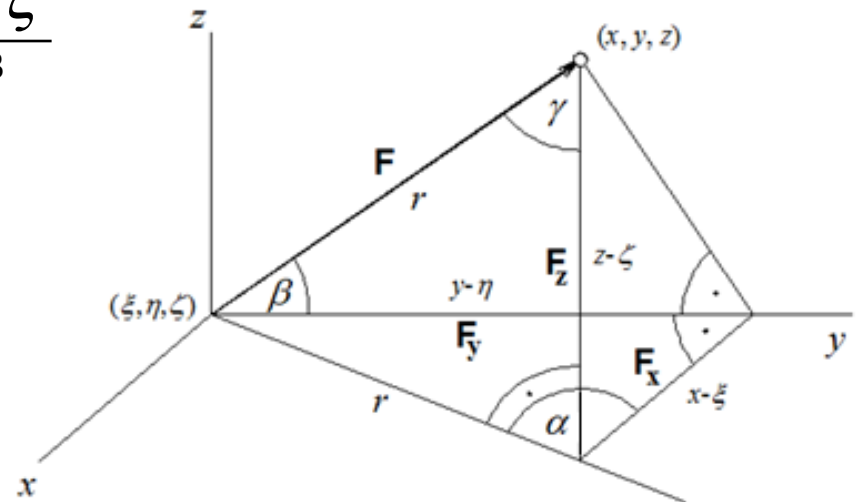
$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F = -G \frac{m}{r^2}$$

Zložky gravitačnej sily

$$F_x = F \cos \alpha = \frac{Gm}{r^2} \frac{x - \xi}{r} = Gm \frac{x - \xi}{r^3}$$

$$F_y = F \cos \beta = \frac{Gm}{r^2} \frac{y - \eta}{r} = Gm \frac{y - \eta}{r^3}$$

$$F_z = F \cos \gamma = \frac{Gm}{r^2} \frac{z - \zeta}{r} = Gm \frac{z - \zeta}{r^3}$$



Zložky odstredivej sily

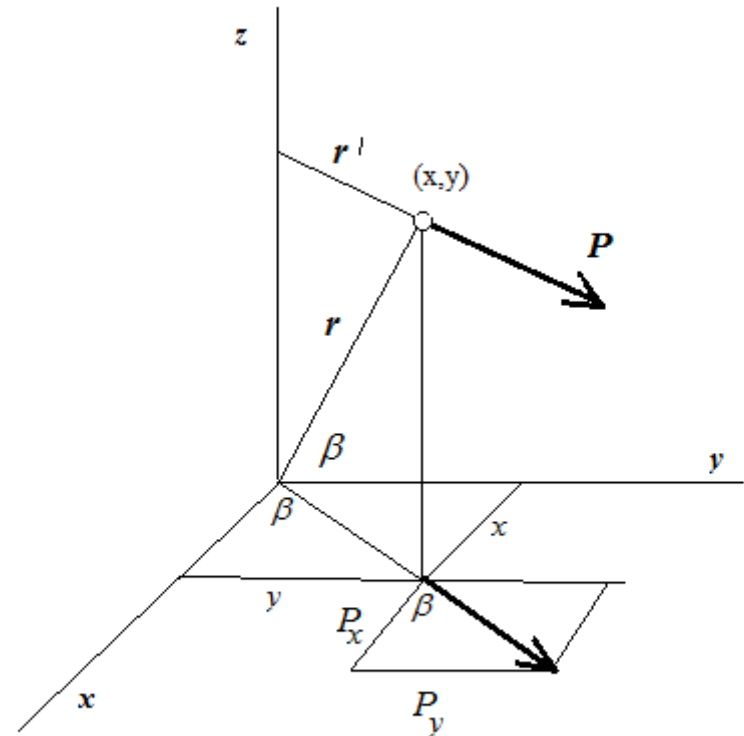
Odstredivá sila pôsobí na hmotný bod a udeľuje mu odstredivé zrýchlenie rovnajúce sa zmene obvodovej rýchlosti $d\mathbf{v}$ v čase dt

$$\mathbf{P} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{f}$$

$$P_x = P \cos \beta = m r' \omega^2 \cos \beta$$

$$P_y = P \sin \beta = m r' \omega^2 \sin \beta$$

$$P_z = 0$$



Gravitačný potenciál systému telies

Dĺžka sprievodiča hmotného bodu:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

Gravitačný potenciál jedného priťahujúceho telesa

$$V = G \frac{m}{r}$$

Gravitačný potenciál systému priťahujúcich telies $m_1, m_2, m_3 \dots$

$$V = G \frac{m_1}{r_1} + G \frac{m_2}{r_2} + G \frac{m_3}{r_3} + \dots = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$$

Hmotnostný element priťahujúceho telesa

Objem hmotnostného elementu dm s rozmermi $d\xi \times d\eta \times d\zeta$

$$d\tau = d\xi d\eta d\zeta$$

Hustota hmotnostného elementu

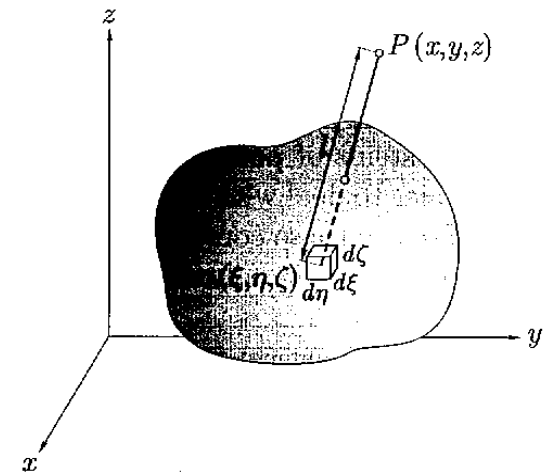
$$\rho = \frac{dm}{d\tau}$$

Newtonov integrál gravitačného potenciálu

$$V = G \int \frac{dm}{r} = G \int_{\tau} \frac{\rho}{r} d\tau$$

$$V = G \iiint \frac{\rho}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V = G \iiint_{\tau} \frac{\rho}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\tau$$



Gradienty potenciálu

Zložky gravitačnej sily sú gradienty potenciálu:

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \text{grad } V$$

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = G \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{\tau} \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta = G \iiint_{\tau} \frac{(x - \xi)}{r^3} \rho d\tau$$

$$F_y = \frac{\partial V}{\partial y} = G \frac{\partial}{\partial y} \iiint_{\tau} \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta = G \iiint_{\tau} \frac{(y - \eta)}{r^3} \rho d\tau$$

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = G \frac{\partial}{\partial z} \iiint_{\tau} \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta = G \iiint_{\tau} \frac{(z - \zeta)}{r^3} \rho d\tau$$

Poissonova a Laplaceova rovnica

Pre potenciál vo vnútri homogénnej gule platí Poissonova rovnica

$$\Delta V = -4\pi G\rho$$

Priestor mimo homogénnej gule sa považuje za „prázdny priestor“ s nulovou hustotou a potenciálom

$$\Delta V = 0$$

kde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

je Laplaceov operátor a

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

je Laplaceova rovnica, ktorej riešením sú **harmonické funkcie**

Sférické harmonické súradnice

$$x = r \sin \vartheta \cos \lambda$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \lambda$$

$$z = r \cos \vartheta$$

Vyjadrenie elementu kvadrátu dĺžky

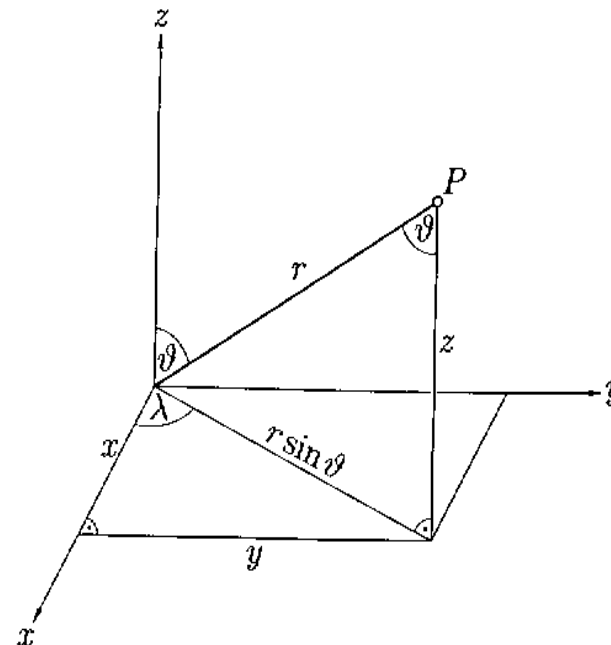
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

z diferenciálnych vzťahov

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda$$



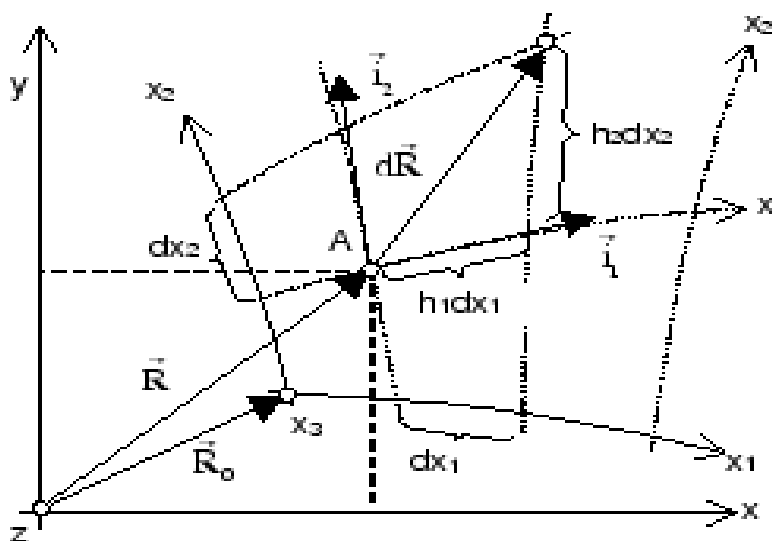
Krivočiara ortogonálna sústava

Vypočítaný element

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\lambda^2$$

Daný element v krivočiarej ortogonálnej sústave

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2$$



Laplaceova rovnica a Lamého koeficienty

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) \right)$$

Porovnaním vyššie uvedených vzorcov dostaneme hodnoty Lamého koeficientov

$$h_1 = 1$$

$$x_1 = r$$

$$h_2 = r$$

$$x_2 = \vartheta$$

$$h_3 = r \sin \vartheta$$

$$x_3 = \lambda$$

Laplaceova rovnica v sférických harmonických súradniciach

$$\Delta V = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0$$

Diferenciálna rovnica je riešená metódou separácie premenných

$$V(r, \vartheta, \lambda) = f(r)Y(\vartheta, \lambda)$$

$$\frac{1}{f} (r^2 f'' + 2rf') + \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right) = 0$$

$$\frac{1}{f} (r^2 f'' + 2rf') = - \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right)$$

Riešenie prvej diferenciálnej rovnice

$$\frac{1}{f} (r^2 f'' + 2rf') = n(n+1)$$
$$-\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right) = n(n+1)$$

Riešenie

$$f_i(r) = r^n \qquad f_e(r) = r^{-(n+1)} = \frac{1}{r^{n+1}}$$

Dve homogénne harmonické funkcie vo vnútri a mimo homogénnej gule

$$\Delta V_i = r^n Y_n(\vartheta, \lambda) \qquad \Delta V_e = \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

Ak sú diferenciálne rovnice lineárne s niekoľkými koreňmi, potom ich riešenie spočíva v rozvoji Laplaceiovej funkcie do radu sférických funkcií. Pre gravitačný potenciál potom platí:

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\vartheta, \lambda) \qquad V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

Riešenia Laplaceovej povrchovej harmonickej funkcie

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y = 0$$

Separácia premenných

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = g(\vartheta)h(\lambda)$$

$$g'' + \cot \vartheta g' + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} h'' + n(n+1)gh = 0$$

Pravá aj ľavá strana rovnice sú funkciou jednej premennej, preto jej riešením je konštanta

$$\frac{\sin \vartheta}{g} (\sin \vartheta g'' + \cos \vartheta g' + \sin \vartheta n(n+1)g) = -\frac{h''}{h}$$

$$\frac{\sin \vartheta}{g} (\sin \vartheta g'' + \cos \vartheta g' + \sin \vartheta n(n+1)g) = m^2$$

Riešením ľavej strany diferenciálnej rovnice

$$-\frac{h''}{h} = m^2 \quad h'' + m^2 h = 0$$

sú interné a externé funkcie

$$h_i(\lambda) = \cos m\lambda$$

$$h_e(\lambda) = \sin m\lambda$$

Pravá strana diferenciálnej rovnice

$$\sin \vartheta g'' + \cos \vartheta g' + \left(\sin \vartheta n(n+1) - \frac{m^2}{\sin \vartheta} \right) g = 0$$

je Legendreova diferenciálna funkcia

$$g(\vartheta) = P_{nm}(\cos \vartheta)$$

Legendreova funkcia

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n$$

Ak $m=0$ dostaneme Legendreove polynómy

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n$$

Zavedením legendreových polynómov dostaneme združenú Legendreovu funkciu

$$P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$$

Legendreov polynóm pre $n=0$ až $n=3$

$$P_0(t) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dt^0} (t^2 - 1)^0 = 1$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d}{dt} (t^2 - 1)^1 = \frac{2}{2} t = t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dt^2} (t^2 - 1)^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} 2(t^2 - 1)2t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (t^3 - t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P_3(t) &= \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dt^3} (t^2 - 1)^3 = \frac{1}{8} \frac{1}{6} \frac{d^2}{dt^2} 3(t^2 - 1)^2 2t = \frac{1}{8} \frac{6}{6} \frac{d^2}{dt^2} (t^4 - 2t^2 + 1)t = \\ &= \frac{1}{8} \frac{d}{dt} (5t^4 - 6t^2 + 1) = \frac{1}{8} (20t^3 - 12t) = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \end{aligned}$$

Legendreova funkcia

$$P_{00}(t) = P_0(t) = 1$$

$$P_{10}(t) = P_1(t) = t$$

$$P_{20}(t) = P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_{11}(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^1 P_1(t)}{dt^1} = \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{dt} = \sqrt{1-t^2}$$

$$P_{21}(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^1 P_2(t)}{dt^1} = \sqrt{1-t^2} \frac{d\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)}{dt} = \sqrt{1-t^2} \frac{3}{2} 2t = 3t\sqrt{1-t^2}$$

$$P_{22}(t) = (1-t^2) \frac{d^2 P_2(t)}{dt^2} = (1-t^2) \frac{d^2\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)}{dt^2} = (1-t^2) \frac{d}{dt} \frac{3}{2} 2t = 3(1-t^2)$$

Základná rovnica Laplaceovej povrchovej funkcie

Pretože sú rovnice lineárne

$$Y_{n_i}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda$$

$$Y_{n_e}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda$$

hocijaká lineárna kombinácia riešenia je tiež riešením funkcie

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda)$$

kde a_{nm}, b_{nm} sú koeficienty

Riešenie Laplaceovej rovnice

Riešením Laplaceovej rovnice je interná

$$V_i(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n (a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda)$$

a externá funkcia vyjadrujúca potenciál homogénnej gule

$$V_e(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda)$$