



Koeficienty harmonickéj povrchovej funkcie

Povrchová harmonická funkcia

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda)$$

Ak povrchovú harmonickú funkciu rozšírime do radu, dostaneme funkciu

$$f(\vartheta, \lambda) = \int_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda) = \int_{n=0}^{\infty} \int_{m=0}^n (a_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda))$$

pričom sme zaviedli ortogonálne funkcie, tzv. konvenčné harmonické koeficienty

$$R_{nm}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda \quad S_{nm}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda$$

Ortogonalita systému funkcií znamená, že integrály súčiny akýchkoľvek dvoch rôznych funkcií nad jednotkovou sférou sú rovné nule.

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\vartheta, \lambda) S_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma = 0$$

Ak je funkcia ortogonálna integrál súčiny tej istej funkcie nad jednotkovou sférou sa pre $m=0$ rovná

$$\iint_{\sigma} (R_{n0}(\vartheta, \lambda))^2 d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1}$$

Pretože $\sin 0 \cdot \lambda = 0$ kvadrát druhej ortogonálnej funkcie sa rovná nule

$$\iint_{\sigma} (S_{n0}(\vartheta, \lambda))^2 d\sigma = 0$$

pričom dvojité integrály je zjednodušený zápis integrálov

$$\iint_{\sigma} \dots d\sigma = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \dots d\vartheta d\lambda$$

Pre n, m platí pre ortogonálne funkcie vzťah

$$\iint_{\sigma} (R_{nm}(\vartheta, \lambda))^2 d\sigma = \iint_{\sigma} (S_{nm}(\vartheta, \lambda))^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Aby sme vyjadrili koeficienty, vynásobíme postupne obidve strany rovnice funkciami R a S

$$\iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) R_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma = a_{nm} \iint_{\sigma} R_{nm}(\vartheta, \lambda)^2 d\sigma + b_{nm} \underbrace{\iint_{\sigma} R_{nm}(\vartheta, \lambda) S_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma}_0$$

$$\iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) S_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma = a_{nm} \underbrace{\iint_{\sigma} R_{nm}(\vartheta, \lambda) S_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma}_0 + b_{nm} \iint_{\sigma} S_{nm}(\vartheta, \lambda)^2 d\sigma$$

Pre koeficienty v harmonickej povrchovej funkcii potom platia vzťahy

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) P_n(\cos \vartheta) d\sigma$$

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) R_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma$$

$$b_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) S_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma$$

Pre ďalšie zjednodušenie výpočtov zavedieme úplné normalizované sférické koeficienty

$$\bar{R}_{n0}(\vartheta, \lambda) = \sqrt{2n+1} R_{n0}(\vartheta, \lambda) \equiv \sqrt{2n+1} P_n(\cos \vartheta)$$

$$\bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} R_{nm}(\vartheta, \lambda)$$

$$\bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} S_{nm}(\vartheta, \lambda)$$

Pre úplné normalizované koeficienty platia tiež pravidlá ortogonalít

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}^2 d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{S}_{nm}^2 d\sigma = 1$$

$$\iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}^2 d\sigma = \iint_{\sigma} \bar{S}_{nm}^2 d\sigma = 4\pi$$

$$f(\vartheta, \lambda) = \int_{n=0}^{\infty} \int_{m=0}^n \left(\bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \right)$$

Podobnými úpravami ako v prípade konvenčných koeficientov, teda postupným násobením normalizovanými funkciami dostaneme normalizované koeficienty

$$\bar{a}_{nm} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma$$

$$\bar{b}_{nm} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\vartheta, \lambda) \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma$$

Vztah mezi konvenčními a normalizovanými koeficientmi

$$\bar{a}_{n0} = \frac{a_{n0}}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\bar{a}_{nm} = \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} a_{nm}$$

$$\bar{b}_{nm} = \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} b_{nm}$$