

GRAVITAČNÝ A TIAŽOVÝ POTENCIÁL ELIPSOIDU

Normálny tiažový potenciál

Harmonické elipsoidické súradnice

u – vedľajšia polos hladinového elipsoidu

ϑ - polárna vzdialenosť

λ - geocentrická dĺžka

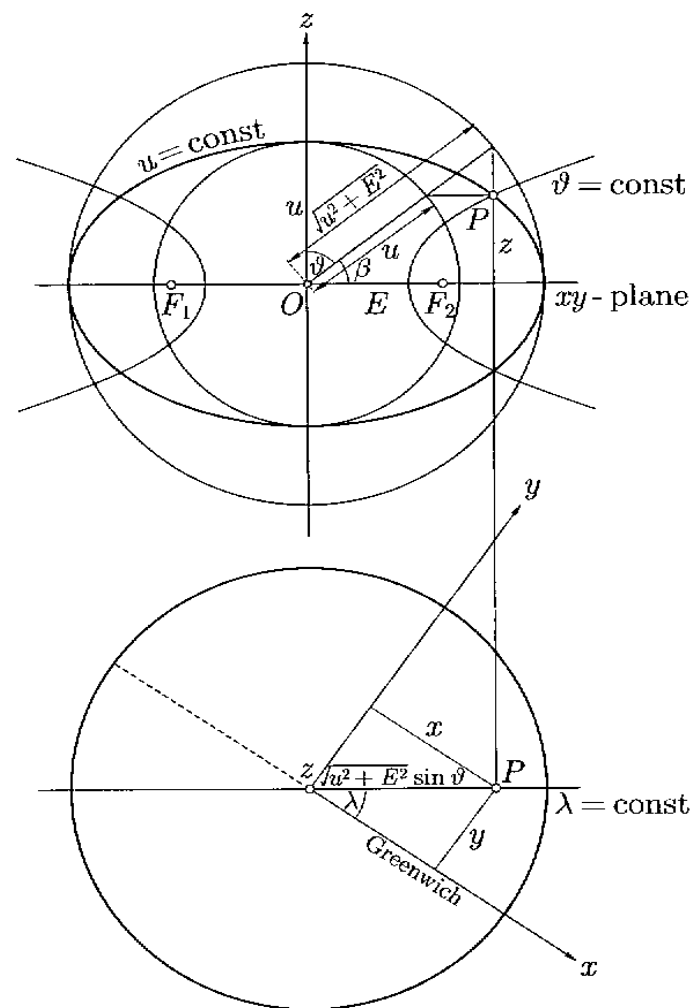
E – lineárna excentricita

$$E^2 = a^2 - u^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{u^2 + E^2}$$

$$x = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \cos \lambda$$

$$y = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \sin \lambda$$

$$z = u \cos \vartheta$$



Riešenie Laplaceovej rovnice

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Vyjadrenie elementu kvadrátu dĺžky

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

z diferenciálnych vzťahov

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda$$

Diferencie pravouhlých súradníc

$$dx = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + E^2}} \sin \vartheta \cos \lambda du + \sqrt{u^2 + E^2} \cos \vartheta \cos \lambda d\vartheta - \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \sin \lambda d\lambda$$

$$dy = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + E^2}} \sin \vartheta \sin \lambda du + \sqrt{u^2 + E^2} \cos \vartheta \sin \lambda d\vartheta + \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \cos \lambda d\lambda$$

$$dz = \cos \vartheta du - u \sin \vartheta d\vartheta$$

Kvadrát elementárneho oblúka

$$ds^2 = \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{u^2 + E^2} du^2 + (u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + (u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta d\lambda^2$$

odpovedá oblúku v krivočiarej ortogonálnej sústave

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2$$

Lamého koeficienty a Laplaceova rovnice

$$h_1^2 = \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{u^2 + E^2} \quad x_1 = u$$

$$h_2^2 = u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta \quad x_2 = \vartheta$$

$$h_3^2 = (u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta \quad x_3 = \lambda$$

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) \right)$$

$$\Delta V = \frac{1}{(u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta)} \cdot$$

$$\cdot \left((u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \right) = 0$$

Riešenie Laplaceovej rovnice

Vylúčením výrazu

$$\frac{1}{(u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta)}$$

dostaneme Laplaceovu rovnicu v elipsoidických harmonických súradniciach

$$(u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0$$

Metóda separácie premenných s trojnásobnou substitúciou

$$V(u, \vartheta, \lambda) = f(u)g(\vartheta)h(\lambda)$$

Substitúciou a postupným delením jednotlivých členov funkciami $f=f(u)$, $g=g(\vartheta)$, $h(\lambda)$ dostaneme postupne rovnice

$$\frac{1}{f} \left((u^2 + E^2) f'' + 2uf' \right) + \frac{1}{g} \left(g'' + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} g' \right) + \frac{1}{h} \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} h'' = 0$$

$$\frac{1}{f} \left((u^2 + E^2) f'' + 2uf' \right) + \frac{1}{g} \left(g'' + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} g' \right) = -\frac{h''}{h} \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta}$$

$$\frac{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta}{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta} \left(\frac{1}{f} \left((u^2 + E^2) f'' + 2uf' \right) + \frac{1}{g} \left(g'' + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} g' \right) \right) = -\frac{h''}{h}$$

Obidve strany rovnice sa rovnajú konštante m^2

$$\frac{1}{f} \left((u^2 + E^2) f'' + 2uf' \right) + \frac{1}{g} \left(g'' + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} g' \right) = m^2 \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta}$$

Dekompozícia pravej strany rovnice

$$\frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} = \frac{u^2 + E^2 (1 - \sin^2 \vartheta)}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} = \frac{u^2 + E^2 - E^2 \sin^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} - \frac{E^2}{u^2 + E^2}$$

Oddelenie funkcií s rovnakou premennou

$$\frac{1}{f} \left((u^2 + E^2) f'' + 2uf' \right) + \frac{1}{g} \left(g'' + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} g' \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} - \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2$$

$$\frac{1}{f} \left((u^2 + E^2) f'' + 2uf' \right) + \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 = -\frac{1}{g} \left(g'' + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} g' \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta}$$

Obidve strany rovnice sú funkciami jednej, od seba nezávislej premennej, takže musia byť rovné konštante

$$\frac{1}{f} \left((u^2 + E^2) f'' + 2uf' \right) + \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 = n(n+1)$$

$$-\frac{1}{g} \left(g'' + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} g' \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = n(n+1)$$

Separáciou premenných sme dostali tri obyčajné diferenciálne rovnice so separovanými premennými, pričom druhá a tretia rovnica je rovnaká ako na homogénnej sfére

$$\begin{aligned} (u^2 + E^2)f'' + 2uf' - \left(n(n+1) - \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 \right) f &= 0 \\ -\frac{1}{g} \left(g'' + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} g' \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} &= n(n+1) \\ h''(\lambda) + m^2 h(\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Zavedenie substitúcia s imaginárnym členom do prvej rovnice

$$v = i \frac{u}{E}$$

a vyjadrenie výrazov

$$u = v \frac{E}{i} \quad u^2 = -v^2 E^2$$

Substitúcia druhej rovnice

$$t = \cos \vartheta$$

Po úpravách dostaneme výsledné diferenciálne rovnice elipsoidických harmonických súradníc

$$(\nu^2 - 1)\bar{f}'' - 2\nu \bar{f}' + \left(n(n+1) - \frac{1}{1-\nu^2} m^2 \right) \bar{f} = 0$$

$$(1-t^2)g'' - 2t g' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right) g = 0$$

$$h''(\lambda) + m^2 h(\lambda) = 0$$

Riešením prvej rovnice sú Legendreove funkcie s komplexným parametrom

$$f_i(u) = P_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)$$

$$f_e(u) = Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)$$

kde Q_{nm} je Legendreova funkcia druhého druhu

Riešením druhej diferenciálnej rovnice je Legendreova funkcia s parametrom $\cos\vartheta$

$$g(\vartheta) = P_{nm}(\cos\vartheta)$$

Riešením tretej rovnice je vnútorná aj vonkajšia funkcia

$$h_i(\lambda) = \cos m\lambda$$

$$h_e(\lambda) = \sin m\lambda$$

Dosadením funkcií do Laplaceovej rovnice dostaneme jej riešenie vo forme lineárnych kombinácií

$$V_i(u, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{P_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{P_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} (a_{nm} P_{nm}(\cos\vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos\vartheta) \sin m\lambda)$$

$$V_e(u, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{Q_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} (a_{nm} P_{nm}(\cos\vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos\vartheta) \sin m\lambda)$$

a_{nm} a b_{nm} sú koeficienty

u je vedľajšia polos hladinového elipsoidu prechádzajúceho daným bodom

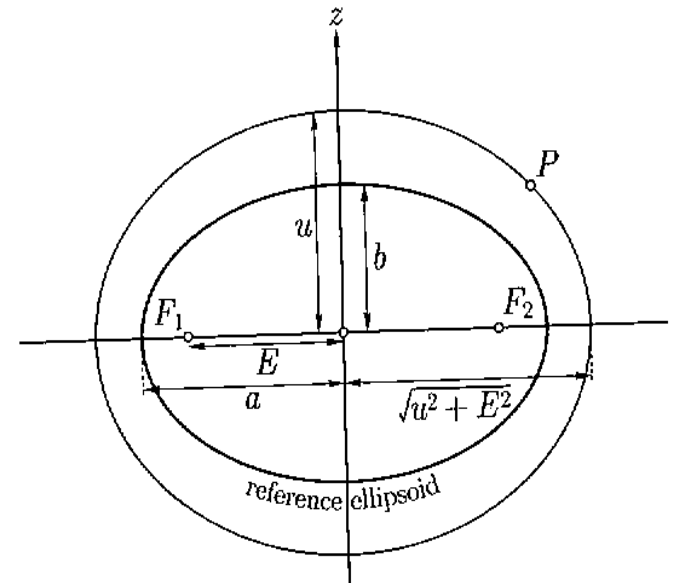
b je vedľajšia polos referenčného elipsoidu

E je lineárna excentricita $E = a^2 - b^2$

r polomer hladinovej gule

R polomer referenčnej gule

Ak je lineárna excentricita rovná nule, ohniská splývajú so stredom a elipsoid je nahradený guľou



$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{P_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{P_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} = \left(\frac{u}{b} \right)^n = \left(\frac{r}{R} \right)^n$$

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} = \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1}$$

Legendreova funkcia druhého druhu

Legendreove funkcie sú jedným z riešení diferenciálnych rovníc

$$Q_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n(t)}{dt^m}$$

Zonálna funkcia

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} P_n(t) \ln \frac{1+t}{1-t} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(t) P_{n-k}(t)$$

$$Q_0(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \operatorname{arctanh} t$$

$$Q_1(t) = \frac{t}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} - 1 = t \cdot \operatorname{arctanh} t - 1$$

$$Q_2(t) = \left(\frac{3}{4} t^2 - \frac{1}{4} \right) \ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{3}{2} t = \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctanh} t - \frac{3}{2} t$$

Výpočet tiažového potenciálu na elipsoide U

Pretože je gravitačný potenciál rotačne symetrický
zjednodušíme rovnicu na tvar

$$V(u, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_n \left(i \frac{b}{E} \right)} A_n P_n(\sin \beta)$$

Odstredivý potenciál

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \beta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \cos^2 \lambda + (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \sin^2 \lambda$$

$$r^2 = (u^2 + E^2) \cos^2 \beta (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) = (u^2 + E^2) \cos^2 \beta$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta$$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\frac{b}{E}\right)} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta$$

Úpravy vzorcov na povrchu referenčného elipsoidu

$$u = b \qquad U = U_o \qquad a^2 = b^2 + E^2$$

$$U_o = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (b^2 + E^2) \cos^2 \beta$$

$$\cos^2 \beta = \frac{2}{3} (1 - P_2(\sin \beta))$$

$$P_2(t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_2(\sin \beta) = \frac{3}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} (1 - \cos^2 \beta) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \beta - \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \beta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{2} \frac{2}{3} \omega^2 a^2 (1 - P_2(\sin \beta)) = U_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 P_2(\sin \beta) - U_0 = 0$$

Vyjadríme si prvé tri členy harmonického radu a ostatné členy presunieme na pravú stranu rovnice

$$\begin{aligned} A_0 P_0(\sin \beta) + A_1 P_1(\sin \beta) + A_2 P_2(\sin \beta) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) = \\ = A_0 + A_1 P_1(\sin \beta) + A_2 P_2(\sin \beta) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) = -\frac{1}{3} \omega^2 a^2 + U_0 + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 P_2(\sin \beta) \end{aligned}$$

Stanovíme si podmienky, podľa ktorých sa obidve strany rovnice rovnajú

$$A_0 = U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \qquad A_3 = A_4 = \dots = 0$$

Zavedenie koeficientov do gravitačného potenciálu

$$V(u, \beta) = \left(U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{Q_0\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_0\left(i \frac{b}{E}\right)} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{Q_2\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_2\left(i \frac{b}{E}\right)} P_2(\sin \beta)$$

Nasledujú úpravy prvej a tretej zonálnej funkcie

$$Q_0\left(i \frac{u}{E}\right) = -i \arctan \frac{E}{u}$$

$$Q_2\left(i \frac{u}{E}\right) = \frac{i}{2} \left(\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right)$$

$$Q_0\left(i \frac{b}{E}\right) = -i \arctan \frac{E}{b}$$

$$Q_2\left(i \frac{b}{E}\right) = \frac{i}{2} \left(\left(1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right)$$

Nahradenie zonálnych funkcií zaužívanými substitučnými členmi

$$q = \frac{1}{2} \left(\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \left(\left(1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right)$$

Ich dosadením do rovnice gravitačného potenciálu elipsoidu dostaneme rovnicu

$$U(u, \beta) = \left(U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{\arctan \frac{E}{u}}{\arctan \frac{E}{b}} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta)$$

V rovnici potrebujeme definovať tiažový potenciál nulovej hladinovej plochy nasledujúcimi zjednodušeniami

Aproximácie pre veľké vzdialenosti

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} + O(1/r^3) \quad \arctan \frac{E}{u} = \frac{E}{r} + O(1/r^3) \quad U_{GM} = \frac{GM}{r} + O(1/r^3)$$

Zjednodušenie prvého člena rovnice

$$U_{GM} = \frac{GM}{r} + O(1/r^3) = \left(U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{\frac{E}{r}}{\arctan \frac{E}{b}} + O(1/r^3)$$

$$GM = \left(U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{E}{\arctan \frac{E}{b}}$$

$$\frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{b} = U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2$$

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{b} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2$$

Dosadenie do gravitačného potenciálu

$$V(u, \beta) = \left(\frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{b} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{\arctan \frac{E}{u}}{\arctan \frac{E}{b}} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta)$$

$$V(u, \beta) = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta)$$

Dosadenie do tiažového potenciálu

$$U(u, \beta) = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta$$

$$P_2(\sin \beta) = \frac{3}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{2}$$

$$U(u, \beta) = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta$$