

Normálne tiažové zrýchlenie

Sa rovná gradientu normálneho potenciálu, definovaného na povrchu elipsoidu

$$\gamma = \text{grad}U = \frac{dU}{ds} = \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_\beta \\ \gamma_\lambda \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta$$

Harmonické elipsoidické súradnice

u – vedľajšia polos hladinového elipsoidu

ϑ - polárna vzdialenosť

λ - geocentrická dĺžka

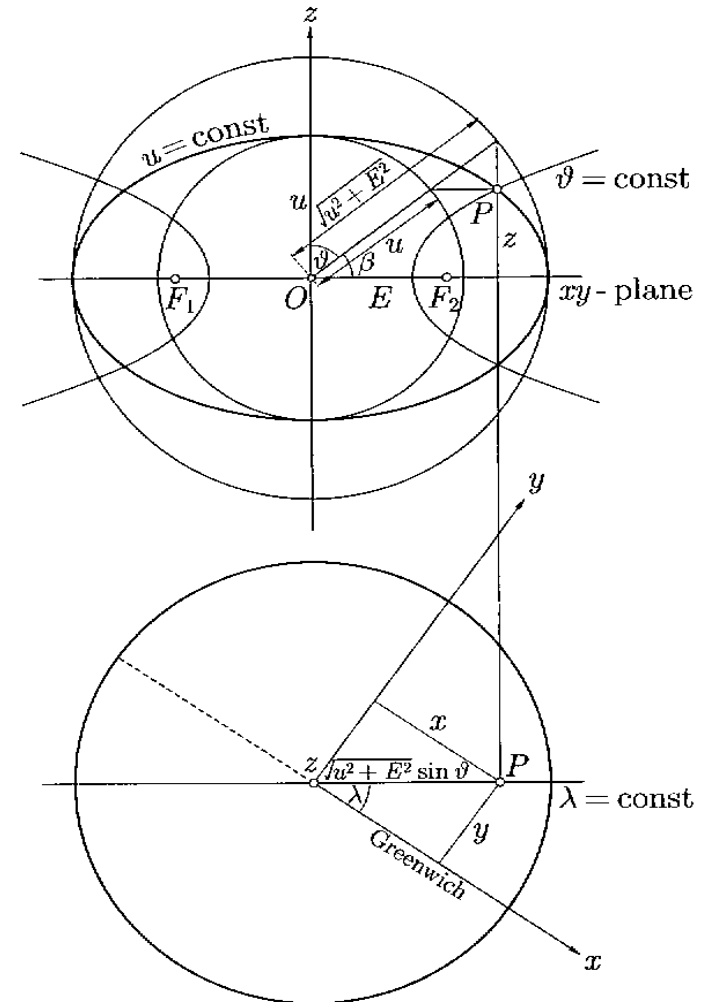
E – lineárna excentricita

$$E^2 = a^2 - u^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{u^2 + E^2}$$

$$x = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \cos \lambda$$

$$y = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \sin \lambda$$

$$z = u \cos \vartheta$$



Vyjadrenie elementu kvadrátu dĺžky

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

z diferenciálnych vzťahov

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda$$

Po ich dosadení a úprave dostaneme diferencie súradníc

$$dx = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + E^2}} \sin \vartheta \cos \lambda du + \sqrt{u^2 + E^2} \cos \vartheta \cos \lambda d\vartheta - \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \sin \lambda d\lambda$$

$$dy = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + E^2}} \sin \vartheta \sin \lambda du + \sqrt{u^2 + E^2} \cos \vartheta \sin \lambda d\vartheta + \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \cos \lambda d\lambda$$

$$dz = \cos \vartheta du - u \sin \vartheta d\vartheta$$

Zložky elementárneho oblúka

$$ds^2 = \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{u^2 + E^2} du^2 + (u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + (u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta d\lambda^2$$

Namiesto polárnej vzdialenosti zavedieme geocentrickú šírku a ďalšie substitúcie

$$\beta = 90^\circ - \vartheta \qquad \omega_0^2 = \frac{u^2 + E^2 \sin^2 \beta}{u^2 + E^2}$$

Jednotlivé členy rovnice tvoria zložky druhých diferencií elementárnej dĺžky, vyjadrenej harmonickými súradnicami

$$ds^2 = \underbrace{\omega_0^2 du^2}_{ds_u^2} + \underbrace{\omega_0^2 (u^2 + E^2) d\beta^2}_{ds_\beta^2} + \underbrace{(u^2 + E^2) \cos^2 \beta d\lambda^2}_{ds_\lambda^2} \qquad \partial s = ds$$

$$ds_u = \omega_0 du \qquad ds_\beta = \omega_0 \sqrt{u^2 + E^2} d\beta \qquad ds_\lambda = \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta d\lambda$$

$$\gamma = \text{grad}U = \frac{dU}{ds} = \left(\gamma_u \quad \gamma_\beta \quad \gamma_\lambda \right)^T = \left(\frac{dU}{ds_u} \quad \frac{dU}{ds_\beta} \quad \frac{dU}{ds_\lambda} \right)^T$$

Zložky tiažového zrýchlenia

$$\gamma_u = \frac{dU}{ds_u} = \frac{1}{\omega_0} \frac{dU}{du}$$

$$\gamma_\beta = \frac{dU}{ds_\beta} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{dU}{d\beta}$$

$$\gamma_\lambda = \frac{dU}{ds_\lambda} = 0$$

$$U = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta$$

Najprv vyjadríme diferencie substitučného člena

$$q = \frac{1}{2} \left(\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{u^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{u} - \frac{3}{2} \frac{u}{E}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial u} &= \frac{3}{2} \frac{2u}{E^2} \arctan \frac{E}{u} - \frac{1}{2} \frac{E}{u^2} \left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \frac{1}{1 + \frac{u^2}{E^2}} - \frac{3}{2} \frac{1}{E} = \\ &= -\frac{E}{u^2 + E^2} \left(-\frac{3u}{E^2} \frac{u^2 + E^2}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) + \frac{3}{2E} \frac{u^2 + E^2}{E} \right) \\ &= -\frac{E}{u^2 + E^2} \left(-3 \frac{u}{E} \right) \left(\frac{u^2}{E^2} + \frac{E^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} + 3 \frac{u^2}{E^2} + 3 \frac{E^2}{E^2} \right) \end{aligned}$$

Zavedieme substitučný člen

$$q'_0 = -\frac{u^2 + E^2}{E} \frac{\partial q}{\partial u} = -3 \left(\frac{u^2}{E^2} + 1 \right) \left(1 - \frac{u}{E} \arctan \frac{E}{u} \right) + 1$$

Potom zložky tiažového zrýchlenia budú

$$\gamma_u = \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{1}{\omega_0} \left(-\frac{GM}{u^2 + E^2} - \frac{\omega^2 a^2 E}{u^2 + E^2} \frac{q'_0}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) + \omega^2 u \cos^2 \beta \right)$$

$$\gamma_\beta = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{1}{\omega_0} \left(\left(\frac{\omega^2 a^2}{\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{q}{q_0} - \omega^2 \sqrt{u^2 + E^2} \right) \sin \beta \cos \beta \right)$$

Nahradíme vedľajšiu polos hladinového elipsoidu u vedľajšou polosou referenčného elipsoidu b a vyjadríme členy

$$\gamma_\beta = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0$$

$$b = u \quad q = q_0 \quad \gamma = \gamma_u \quad a = \sqrt{b^2 + E^2}$$

Potom pre normálne tiažové zrýchlenie platí

$$\gamma = \frac{1}{\omega_0} \left(-\frac{GM}{b^2 + E^2} - \frac{\omega^2 a^2 E}{b^2 + E^2} \frac{q'_0}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) + \omega^2 b \cos^2 \beta \right)$$

Upravíme substitučný člen

$$\omega_0^2 = \frac{b^2 + E^2 \sin^2 \beta}{b^2 + E^2} = \frac{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \beta}{a^2} = \frac{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}{a^2}$$

pretože kvadrát hlavnej polosi sa rovná $a^2 = b^2 + E^2$

$$\gamma = -\frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left(1 + \frac{\omega^2 a^2 E}{GM} \frac{q'_0}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \cos^2 \beta \right)$$

Zavedieme ďalšiu substitúciu a druhú numerickú excentricitu a upravíme

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad e'^2 = \frac{E^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$\gamma = -\frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left(\left(1 + \frac{me'}{3} \frac{q'_0}{q_0} \right) \sin^2 \beta + \left(1 - m - \frac{me'}{6} \frac{q'_0}{q_0} \right) \cos^2 \beta \right)$$

Na rovníku je geocentrická šírka rovná nule a rovnica tiažového zrýchlenia sa zjednoduší na tvar

$$\gamma_a = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{me'}{6} \frac{q'_0}{q_0} \right)$$

Naopak na póloch je $\beta = \pm 90^\circ$ a pre tiažové zrýchlenie platí

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{me'}{2} \frac{q'_0}{q_0} \right)$$

Dosadením rovníc tiažového zrýchlenia dostaneme po úprave, výsledný a dobre zapamätateľný vzťah pre normálne tiažové zrýchlenie

$$\gamma = \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left(\frac{a^2 \gamma_b}{GM} \sin^2 \beta + \frac{ab \gamma_a}{GM} \cos^2 \beta \right)$$

$$\gamma = \frac{a \gamma_b \sin^2 \beta + b \gamma_a \cos^2 \beta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}}$$

Somiglianiho vzorec

Zavedením geodetickej šírky namiesto geocentrickej

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \tan \varphi$$

dostaneme Somiglianiho vzorec

$$\gamma = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

pre presný výpočet normálneho tiažového zrýchlenia referenčného elipsoidu

Jeho fyzikálny význam spočíva v presnom stanovení rozloženia tiaže na hladinovom elipsoide v závislosti od geodetickej šírky

Tabuľky normálneho tiažového zrýchlenia z veľkého počtu meraní, pre rôzne φ

Na našom území sa normálne tiažové zrýchlenie mení o 0,0009 m.s⁻² na 1° zemepisnej šírky φ (90 mgal)

Zoznam používaných vzorcov v praxi

Helmert (1909)

$$\gamma = 9780300 (1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2 \varphi) [\text{mm.s}^{-2}]$$

Cassinis (1930)

$$\gamma = 9780490 (1 + 0.0052884 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2 \varphi) [\text{mm.s}^{-2}]$$

IGF67 (1967)

$$\gamma = 9780318 (1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2 \varphi) [\text{mm.s}^{-2}]$$

IGF80 (1980)

$$\gamma = 9780327 (1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.0000058 \sin^2 2 \varphi) [\text{mm.s}^{-2}]$$

Helmert určil konštanty v rokoch 1901-1909 z 1603 meraných a redukovaných hodnôt tiažového zrýchlenia pri sploštení $i=1:298,2$

$$\gamma_H = 9,78030 \left(1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi \right) \text{m.s}^{-2}$$

používa sa pre Krasovského elipsoid, lebo odpovedá splošteniu $i_K=1:298,3$

Cassiniho vzorec doporučila Medzinárodná únia geodetická a geofyzikálna v roku 1930 ako medzinárodný pre Hayfordov elipsoid so sploštením $i=1:297,0$

$$\gamma_C = 9,780318 \left(1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi \right) \text{m.s}^{-2}$$

Konvenčná stredná hodnota normálneho tiažového zrýchlenia na povrchu Zeme

$$\bar{\gamma} = 9,806\,65 \text{ m.s}^{-2}$$

Skutočné tiažové zrýchlenie

Spôsobené skutočným tiažovým poľom Zeme

Merané gravimetrickými prístrojmi:

- Kyvadlové merania
 - pôvodné merania využívali dobu kyvu vhodného kyvadla
- Merania využívajúce voľný pád
 - presnejšie

Absolútne merania

- hodnota tiažového zrýchlenia na bode

Relatívne merania

- určujú sa rozdiely tiažových zrýchlení medzi tiažovými bodmi
- pripočítavajú sa relatívne hodnoty