

GRAVITAČNÝ A TIAŽOVÝ POTENCIÁL ZEME

SFÉRICKÁ VZDIALENOSŤ

Odvodíme vzťah pre recipročnú hodnotu priestorovej vzdialenosti

$$l^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \psi}}$$

Zavedieme substitúcie

$$\alpha = \frac{r'}{r} \quad t = \cos \psi$$

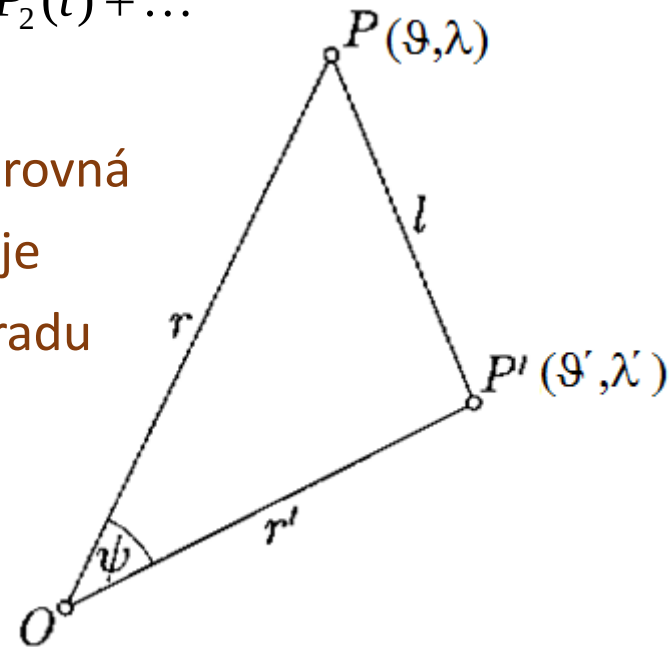
$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha t + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(t) = P_0(t) + \alpha P_1(t) + \alpha^2 P_2(t) + \dots$$

Prevrátená hodnota recipročnej vzdialenosti sa rovná

Legendreovej pridruženej funkcii, čo predstavuje rozvoj recipročnej odmocniny do binomického radu

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \psi)$$

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi)$$



DEKOMPOZIČNÁ FORMULA

Pre sférickú vzdialenosť na obrázku platí kosínusová veta,

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda')$$

ktorú použijeme pre dekompozičnú formulu Legendreových polynómov, pričom využijeme adičnú teorému

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \vartheta)P_n(\cos \vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \vartheta)P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m(\lambda - \lambda')$$

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) = & P_n(\cos \vartheta)P_n(\cos \vartheta') + \\ & + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (P_{nm}(\cos \vartheta)P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m\lambda \cos m\lambda' - \\ & - P_{nm}(\cos \vartheta)P_{nm}(\cos \vartheta') \sin m\lambda \sin m\lambda') \end{aligned}$$

Zavedieme konvenčné harmonické funkcie

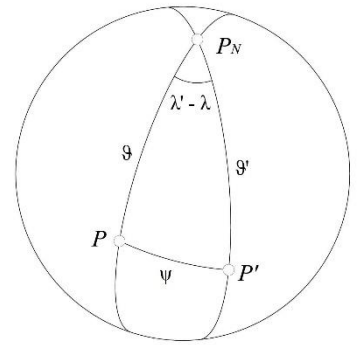
$$R_{nm}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda$$

$$R_{nm}(\vartheta', \lambda') = P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m\lambda'$$

$$S_{nm}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda$$

$$S_{nm}(\vartheta', \lambda') = P_{nm}(\cos \vartheta') \sin m\lambda'$$

a dosadíme ich do Legendreových polynómov



$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \vartheta)P_n(\cos \vartheta') + \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (R_{nm}(\vartheta, \lambda)R_{nm}(\vartheta', \lambda') - S_{nm}(\vartheta, \lambda)S_{nm}(\vartheta', \lambda'))$$

Ďalšie zjednodušenie dostaneme zavedením úplných normalizovaných funkcií

$$\bar{R}_{n0}(\vartheta, \lambda) = \sqrt{2n+1} P_n(\cos \vartheta)$$

$$\bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} R_{nm}(\vartheta, \lambda)$$

$$\bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} S_{nm}(\vartheta, \lambda)$$

a dostaneme

$$P_n(\cos \psi) = \frac{\bar{R}_{n0}(\vartheta, \lambda)\bar{R}_{n0}(\vartheta', \lambda')}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+1}} + \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (\bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda)\bar{R}_{nm}(\vartheta', \lambda') - \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)\bar{S}_{nm}(\vartheta', \lambda'))$$

RECIPROČNÁ PRIESTOROVÁ VZDIALENOSŤ

Pripočítame prvky s $m=0$ do sumy a upravíme vzťah do tvaru

$$P_n(\cos \psi) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} \left(\bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\vartheta', \lambda') - \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{S}_{nm}(\vartheta', \lambda') \right)$$

Vzťah pre výpočet Legendreových polynómov dosadíme do recipročnej priestorovej dĺžky

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi)$$

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r'^n}{r^{n+1}} \left(\bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\vartheta', \lambda') - \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{S}_{nm}(\vartheta', \lambda') \right)$$

GRAVITAČNÝ POTENCIÁL V HARMONICKEJ FUNKCII

Pri výpočte gravitačného potenciálu Zeme berieme do úvahy fakt, že sa potenciál mimo priťahujúcej častice chová ako harmonická funkcia, ktorá môže byť rozšírená do radu sférických funkcií

$$V = G \iiint_{Zem} \frac{dM}{l}$$
$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} G \iiint_{Zem} r'^n P_n(\cos \psi) dM$$

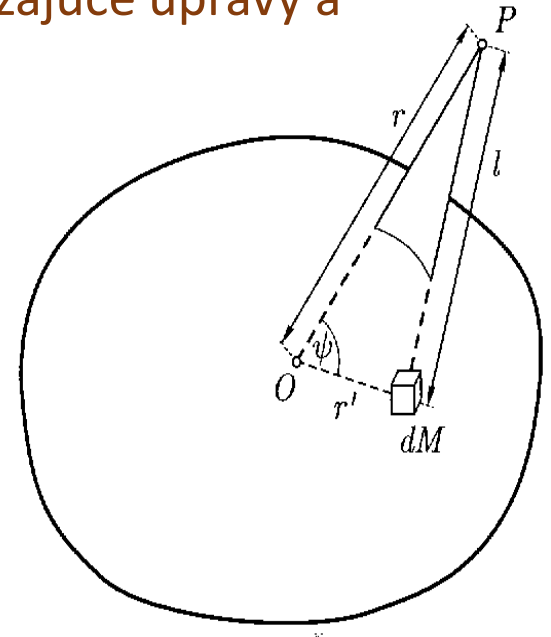
Za recipročnú hodnotu dĺžky dosadíme predchádzajúce úpravy a dostaneme

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\bar{A}_{nm} \frac{\bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} - \bar{B}_{nm} \frac{\bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} \right)$$

kde sme dosadili nasledujúce koeficienty

$$(2n+1)\bar{A}_{nm} = G \iiint_{Zem} r'^n \bar{R}_{nm}(\vartheta', \lambda') dM$$

$$(2n+1)\bar{B}_{nm} = G \iiint_{Zem} r'^n \bar{S}_{nm}(\vartheta', \lambda') dM$$



FUNKCIE V GRAVITAČNOM POTENCIÁLY

Koeficienty A , B vo vzťahu pre gravitačný potenciál Zeme sa určia napr. z „okrajovej úlohy“ na povrchu Zeme

Ak vyjadríme úplné normalizované koeficienty konvenčnými dostaneme pre konvenčné koeficienty vzťahy

$$A_{n0} = G \iiint r'^n P_n(\cos \vartheta') dM$$

$$A_{nm} = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} G \iiint_{Zem} r'^n R_{nm}(\vartheta', \lambda') dM$$

$$B_{nm} = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} G \iiint_{Zem} r'^n S_{nm}(\vartheta', \lambda') dM$$

Ich dosadením do rovnice gravitačného potenciálu Zeme dostaneme

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(A_{nm} \frac{R_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} - B_{nm} \frac{S_{nm}(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} \right)$$

Keď posunieme priťahujúcu časticu na rovník dosadíme polomer rovníka a koeficienty C , S

$$A_{nm} = GMa^n C_{nm}$$

$$B_{nm} = GMa^n S_{nm}$$

dostaneme vzťah, ktorý sa používa v družicovej dynamike

$$V = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\left(\frac{a}{r} \right)^n C_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + S_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda) \right) \right)$$

pričom je nutné rozlišovať koeficienty C_{nm} , S_{nm} a funkcie $R_{nm}(\vartheta, \lambda)$, $S_{nm}(\vartheta, \lambda)$

Zodpovedajúce úplné normalizované koeficienty majú tvar

$$\bar{C}_{n0} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} C_{n0}$$

$$\bar{C}_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} C_{nm}$$

$$\bar{S}_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} S_{nm}$$

STOKESOVE KOEFICIENTY

Konvenčné koeficienty v gravitačnom potenciály sa nazývajú Stokesove koeficienty:

$$C_{n0} = \frac{A_{n0}}{GMa^n} = \frac{1}{Ma^n} \iiint_{Zem} r'^n P_n(\cos \vartheta') dM$$

$$C_{nm} = \frac{A_{nm}}{GMa^n} = 2 \frac{1}{Ma^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{Zem} r'^n R_{nm}(\vartheta', \lambda') dM$$

$$S_{nm} = \frac{B_{nm}}{GMa^n} = 2 \frac{1}{Ma^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{Zem} r'^n R_{nm}(\vartheta', \lambda') dM$$

V globálnej aj fyzikálnej geodézii sa používa iný vzťah pre gravitačný potenciál

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} \left(\frac{A+B}{2} - C \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \frac{3G}{r^3} \frac{(B-A)}{4} \sin^2 \vartheta \cos 2\lambda + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{Z_n}{r^{n+1}}$$

kde A , B , C sú momenty zotrvačnosti v príslušných osiach

Moment zotrvačnosti vyjadruje kinetickú energiu otáčavého pohybu telesa. Moment zotrvačnosti pre hmotný bod sa rovná

$$I = m.r^2$$

Kinetická energia otáčavého hmotného bodu

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

Momenty zotrvačnosti v rovnici gravitačného potenciálu

$$A = \int_{\tau} \rho (z'^2 + y'^2) d\tau = \iiint_{Zem} (z'^2 + y'^2) dM$$

$$B = \int_{\tau} \rho (z'^2 + x'^2) d\tau = \iiint_{Zem} (z'^2 + x'^2) dM$$

$$C = \int_{\tau} \rho (x'^2 + y'^2) d\tau = \iiint_{Zem} (x'^2 + y'^2) dM$$

Posledný člen rovnice gravitačného potenciálu

$$O(1/r^4) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{Z_n}{r^{n+1}}$$

predstavuje chybu, akej sa dopustíme zanedbaním členov so štvrtými a vyššími mocninami. Býva často zanedbateľná pri rôznych astronomických výpočtoch, kde vektory polomerov hladinových plôch dosahujú hodnôt vzdialenosti medzi Zemou a Mesiacom cca 384 400 km.

$$Z_n = G \int_{\tau} \rho r'^n P_n(\cos \psi) d\tau$$

Rovnica gravitačného potenciálu Zeme sa používa pri určovaní tvaru Zeme. V praktických výpočtoch sa zjednodušuje na tvar

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} (A - C) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{Z_n}{r^{n+1}}$$

alebo

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} (A - C) P_2(\cos \vartheta) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{Z_n}{r^{n+1}}$$

pretože Zem je rotujúce teleso a prvé momenty zotrvačnosti $A \cong B$ sú približne rovnaké

ROVNICA GEOIDU

Podobne ako tiažová sila, aj tiažový potenciál je daný súčtom gravitačného a odstredivého potenciálu

$$W = W(x, y, z) = V + \Phi$$

Zatiaľ čo gravitačný potenciál je mimo Zeme harmonická funkcia, realizovaná rozvojom do radu sférických funkcií, odstredivý potenciál je jednoduchá analytická funkcia daná vzťahom

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

kde x, y sú súradnicové priemety vektora sprievodiča od rotačnej osi a $z = 0$

$$W = \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} (A - C) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{Z_n}{r^{n+1}} + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \vartheta$$

Prvý člen rovnice predstavuje potenciál rotačnej gule, ktorý svojou presnosťou postačuje pri výpočtoch v astronomickej geodézii, pri kozmických vzdialenostiach

$$V_G = \frac{GM}{r}$$

Druhý člen obsahuje momenty zotrvačnosti Zeme. Takto vyjadrený tiažový potenciál má veľký význam pre určovanie tvaru Zeme. Ak vynecháme tretí a vyššie rády a dosadíme zemepisnú šírku namiesto pólovej vzdialenosti dostaneme rovnicu tiažového potenciálu Zeme, nazvanú *rovnica geoidu* v tvare

$$W(r, \varphi, \lambda) = W_0 = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3} (A - C) (3 \sin^2 \varphi - 1) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \vartheta$$

Pojem geoid do teórie tvaru Zeme prvý raz zaviedol v roku 1871 francúzsky vedec Johann Benedict Listing.

Podľa klasickej definície je geoid plocha s tiažovým potenciálom totožná so strednou hladinou vody v oceánoch a pod kontinentami a je vo všetkých bodoch kolmá k siločiaram tiažového poľa Zeme.

Pretože, v skutočnosti, ani stredné hladiny oceánov netvoria jedinú hladinovú plochu, realizuje sa geoid hladinovou plochou prechádzajúcou určitým zvoleným bodom, ležiacim v nulovej výške, vzhľadom k stredným hladinám morí a oceánov

NUMERICKÉ HODNOTY TIAŽOVÉHO POTENCIÁLU GEOIDU

V odbornej literatúre sa najčastejšie uvádzajú dve numerické hodnoty tiažového potenciálu geoidu. Prvá hodnota je odhad viacerých analýz geodetických údajov, ktoré obsahujú dostatočne presné hodnoty **Stokesových koeficientov**

$$W_0 = 62\,663\,856,0 \pm 0,5 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$

Druhá numerická hodnota bola vypočítaná pre elipsoid GRS80 ako ekvivalent normálneho tiažového potenciálu

$$W_0 = U_0 = 62\,663\,860,850 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$

V súvislosti s geoidom Listing zaviedol pojem **regularizovaný geoid**, ktorý definoval ako geoid prebiehajúci na moriach, oceánoch kontinentoch a ostrovoch tak, akoby všetky hmotnosti nad geoidom boli premiestnené do vnútra Zeme, ale za podmienky, že sa vonkajší potenciál nemení.

CLAIRAUTOV SFÉROID

Sféroid je hladinová plocha realizovaná tiažovým potenciálom Zeme, ktorý je vypočítaný z radu sférických harmonických funkcií a má obmedzený počet členov radu

Špeciálnym prípadom sféroidu je **Clairautov sféroid**, ktorý charakterizujú tri podmienky:

1. Prvá podmienka je založená na požiadavke, že hladinové plochy sú symetrické k rotačnej osi, ktorá je totožná s osou z. Znamená to, že výpočty sú nezávislé od geocentrickej dĺžky, takže $m=0$ a vo výpočtoch zostávajú len zonálne koeficienty. Z prvej podmienky tiež vyplýva, že momenty zotrvačnosti k osiam x , y sa rovnajú, a teda $A=B$
2. Druhou požiadavkou je totožnosť hmotného ťažiska sféroidu s počiatkom súradnicovej sústavy. Z toho vyplýva, že Stokesove koeficienty prvého rádu sú nulové

$$C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$$

1. Tretia požiadavka Clairautovho sféroidu vychádza zo symetrie hladinových plôch k rovine rovníka. Z tejto podmienky vyplýva, že všetky nepárne členy radu harmonických funkcií budú nulové.

Pri riešení sféroidu vychádzame z rovnice geoidu, ktorý sa v tomto zmysle chápe ako sféroid n -tého rádu a z porovnania rovnice geoidu pre ľubovoľný bod

$$W(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} (A - C) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \vartheta$$

a rovnice geoidu na rovníku, kde platí

$$r = a$$

$$\vartheta = 90^\circ$$

$$\varphi = 0^\circ$$

$$W_0 = W(a, 90^\circ, \lambda) = \frac{GM}{a} - \frac{G}{2a^3} (A - C) + \frac{\omega^2}{2} a^2$$

dostaneme

$$\frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} (A - C) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \vartheta = \frac{GM}{a} - \frac{G}{2a^3} (A - C) + \frac{\omega^2}{2} a^2$$

Vyberieme GM/r a GM/a pred zátvorku

$$\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{(A-C)}{Mr^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2 r^3}{2GM} \sin^2 \vartheta \right) = \frac{GM}{a} \left(1 - \frac{(A-C)}{2Ma^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right)$$

Pretože polomer sféroidu sa približne rovná veľkej polosi, nahradíme druhé a vyššie diferencie vektora polomeru hlavnou polosou

$$r^2 \approx a^2$$

$$r^3 \approx a^3$$

$$\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{(A-C)}{Ma^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \sin^2 \vartheta \right) = \frac{GM}{a} \left(1 - \frac{(A-C)}{2Ma^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right)$$

Zavedieme parameter, ktorý definuje pomer odstredivého a gravitačného zrýchlenia na rovníku a reprezentuje fyzikálne vlastnosti

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$$

$$\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{(A-C)}{Ma^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \frac{q}{2} \sin^2 \vartheta \right) = \frac{GM}{a} \left(1 - \frac{(A-C)}{2Ma^2} + \frac{q}{2} \right)$$

Vyjadríme r a otočíme (C-A)

$$r = a \left(1 - \frac{(C-A)}{2Ma^2} (3\cos^2 \vartheta - 1) + \frac{q}{2} \sin^2 \vartheta \right) \left(1 + \frac{(C-A)}{2Ma^2} + \frac{q}{2} \right)^{-1}$$

Druhý člen rovnice rozvinieme do Binomického radu a obmedzíme sa len na prvý člen funkcie

$$r = a \left(1 - \frac{(C-A)}{2Ma^2} (3\cos^2 \vartheta - 1) + \frac{q}{2} \sin^2 \vartheta - \frac{(C-A)}{2Ma^2} - \frac{q}{2} \right)$$

$$r = a \left(1 - \frac{3}{2} \frac{(C-A)}{Ma^2} \cos^2 \vartheta + \frac{(C-A)}{2Ma^2} + \frac{q}{2} (\sin^2 \vartheta - 1) - \frac{(C-A)}{2Ma^2} \right)$$

$$r = a \left(1 - \frac{3}{2} \frac{(C-A)}{Ma^2} \cos^2 \vartheta - \frac{q}{2} \cos^2 \vartheta \right)$$

a zavedieme moment zotrvačnosti z rovnice, ktorý predstavuje mieru sploštenia sféroidu

$$I_2 = \frac{C-A}{Ma^2}$$

$$r = a \left(1 - \left(\frac{3}{2} I_2 + \frac{q}{2} \right) \cos^2 \vartheta \right)$$

Ďalšia substitúcia predstavuje sploštenie sféroidu a vyjadruje vzťah medzi geometrickým sploštením a fyzikálnymi parametrami Zeme

$$\alpha = \frac{3}{2} I_2 + \frac{q}{2} = \frac{a-b}{a}$$

Rovnica Clairautovho sféroidu je totožná s polárnou rovnicou elipsy

$$r = a(1 - \alpha \cos^2 \vartheta)$$

Tiažový potenciál na povrchu Clairautovho sféroidu je daný vzťahom, nazvaným „**rovnica Clairautovho sféroidu**“

$$W_0 = \frac{GM}{a} \left(1 + \frac{\alpha}{3} + \frac{q}{3} \right)$$