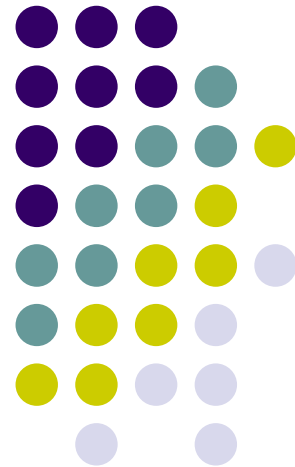


# Hydromechanika a Hydrológia

## 3. prednáška



# Základné rovnice (dokončenie)



- Zákon o zachovaní momentov

Zákon o zachovaní momentov hovorí, že súčet všetkých síl, pôsobiacich na kontrolný objem sa rovná rýchlosti zmeny momentov vo vnútri kontrolného objemu a toku momentov cez kontrolný povrch:

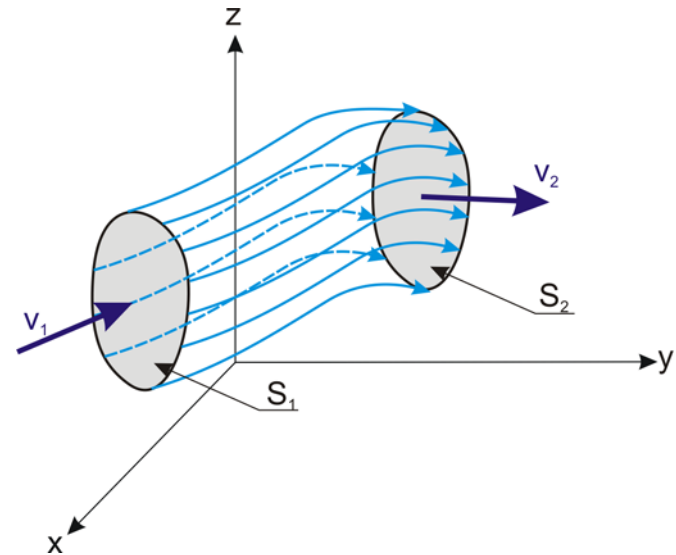
$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV + \int_A \vec{u} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

- Ustálené prúdenie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = \int_A \vec{u} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

- Prúdnicia  $\vec{n} = 1$

$$\int_A \vec{u} \cdot \vec{n} dA = Q \longrightarrow \boxed{\sum \vec{F} = \rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}$$



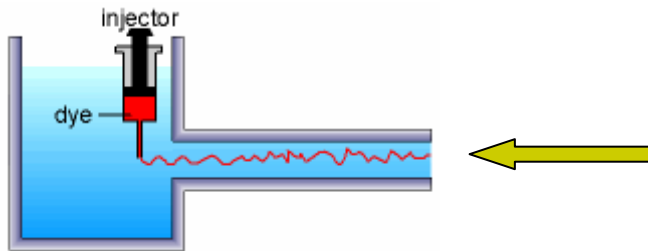
# Laminárne a turbulentné prúdenie



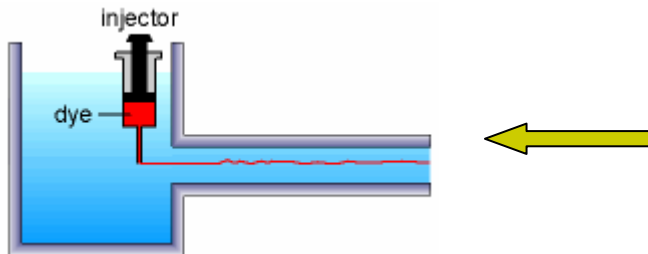
- Reynoldsov experiment



Do potrubia vstrekuje farbu. Pre malé rýchlosti prúdenia sa ofarbí iba prúdové vlákno, ktoré zostáva priame. To je **laminárne** prúdenie, pri ktorom zostávajú prúdnice neporušené.

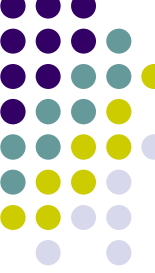


Pri vysokých rýchlostiach prúdenia sa farbu ihneď pri vstupe náhodne rozptýli vďaka pulzáciám rýchlosti v smere kolmo na hlavný smer prúdenia. Pozorujeme rýchly rozptyl farbiva v potrubí. Ide o **turbulentné prúdenie**, pri ktorom sú prúdové trubice porušené.



**Prechodné** prúdenie – farbu na začiatku ofarbí prúdovú trubicu, neskôr sa ale táto rozkmitáva a postupne porušuje.

# Laminárne a turbulentné prúdenie



- Reynoldsove číslo

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu}$$

$v$  – rýchlosť prúdenia,  
 $d$  – priemer potrubia, dĺžkový parameter  
 $\nu$  – kinematická viskozita,  
 $\mu$  – dynamická viskozita,  
 $\rho$  – hustota kvapaliny

Kritické  $\text{Re}=2320$ ,

Laminárne  $\text{Re}<1600$

Prechodné  $\text{Re}=1600$  až  $3200$

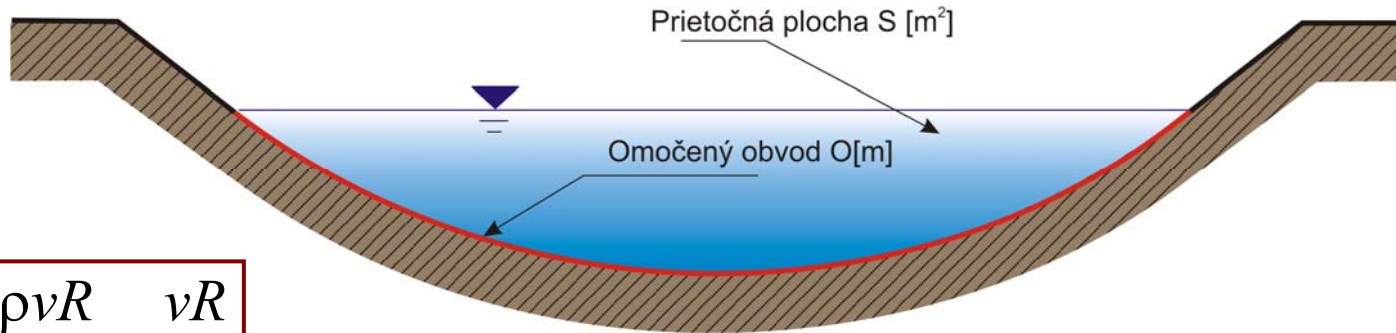
Turbulentné  $\text{Re}>3200$

$\text{Re}$  je bezrozmerné.

# Laminárne a turbulentné prúdenie



- Reynoldsove číslo pre nepravidelné korytá



$$Re = \frac{\rho v R}{\mu} = \frac{v R}{\nu}$$

Hydraulický polomer  $R$ [m]

$$R = \frac{S}{O}$$

$S$  – prietčná plocha, t.j. plocha rezu kolmo na smer prúdenia

$O$  – omočený obvod, t.j. dĺžka rezu, kde sa kvapalina dotýka dna a brehov koryta

Hydraulický polomer pre kruhové potrubie:

$$R = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}$$



$Re$  pre korytá je 4x menšie

# Prúdenie v potrubí

- Laminárne ustálené prúdenie – potrubie má rovnaký priemer

$$G \cdot \sin \alpha = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot y^2 \cdot dx \cdot \sin \alpha = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot y^2 \cdot dx \cdot \frac{z_1 - z_2}{dx}$$

$$G \cdot \sin \alpha = \rho g \pi y^2 (z_1 - z_2)$$

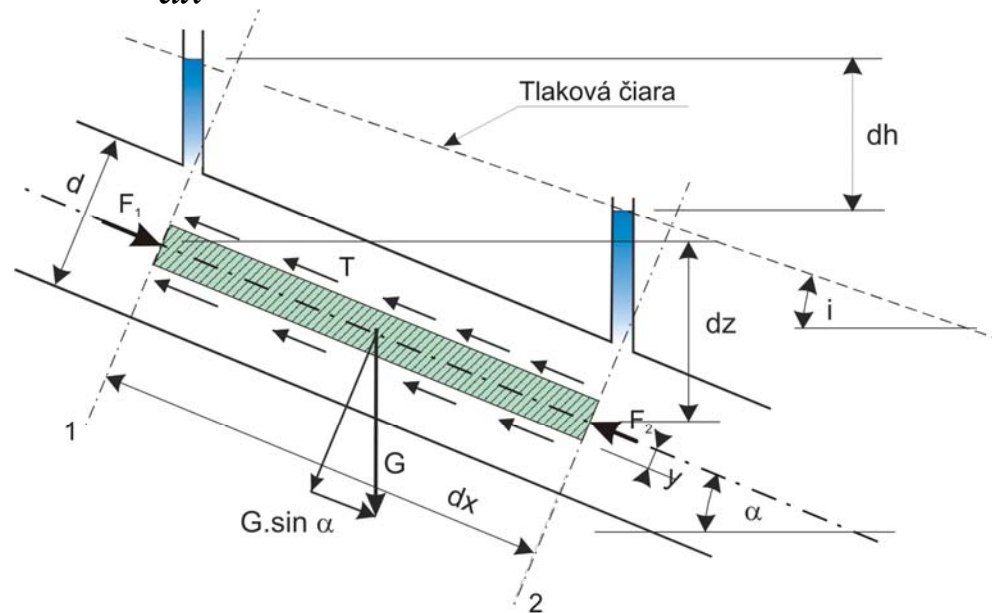
$$F_1 = \pi y^2 p_1 \quad F_2 = \pi y^2 p_2$$

$$T = \tau 2\pi y dx = -\mu \frac{du}{dy} 2\pi y dx$$

Sily musia byť v rovnováhe:

$$G \sin \alpha + F_1 - T - F_2 = 0$$

$$\rho g \pi y^2 (z_1 - z_2) + \pi y^2 p_1 - \pi y^2 p_2 + \mu \frac{du}{dy} 2\pi y dx = 0$$



# Prúdenie v potrubí

- Laminárne ustálené prúdenie

$$\rho g y^2 \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - z_2 - \frac{p_2}{\rho g} \right) + \mu \frac{du}{dy} 2y dx = 0 \Rightarrow \rho g y \frac{dh}{dx} + 2\mu \frac{du}{dy} = 0$$

$$\frac{dh}{dx} = i \Rightarrow \rho g y i + 2\mu \frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g i}{2\mu} y \Rightarrow u = -\int \frac{\rho g i}{2\mu} y dy + C$$

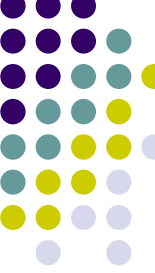
Okrajová podmienka  $u=0$  pri stene potrubia



$$0 = -\frac{\rho g i}{2\mu} \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\rho g i}{2\mu} \frac{d^2}{8}$$

$$u = \frac{\rho g i}{4\mu} \left[ \left( \frac{d}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

Integračná konštanta, musí sa stanoviť z okrajovej podmienky



# Prúdenie v potrubí

- Maximumálna rýchlosť

- V ose potrubia ( $y=0$ )

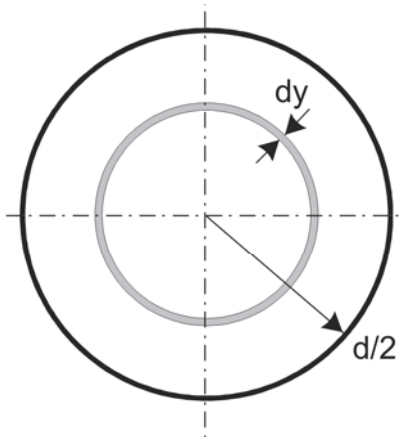
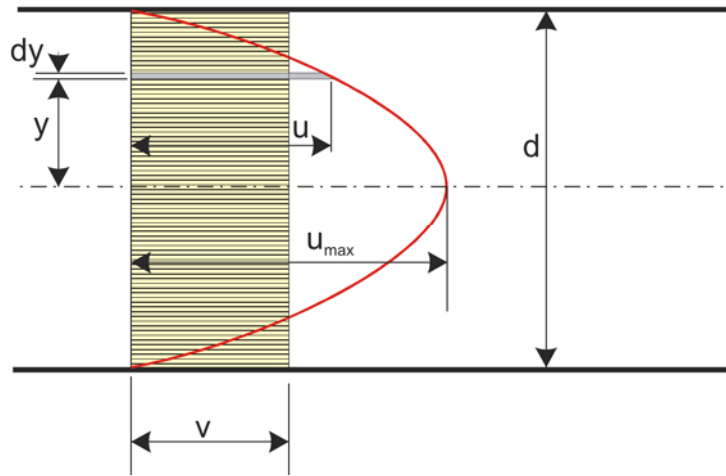
$$u_{\max} = \frac{\rho g i}{4\mu} \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\rho g i}{16\mu} d^2$$

- Priemerná rýchlosť

$$v = \frac{Q}{A}$$

$$Q = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi y u dy = \frac{\rho g i}{4\mu} \int_0^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) dy = \frac{\rho g \pi i}{8\mu} \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$v = \frac{\rho g i}{32\mu} d^2 = \frac{u_{\max}}{2}$$

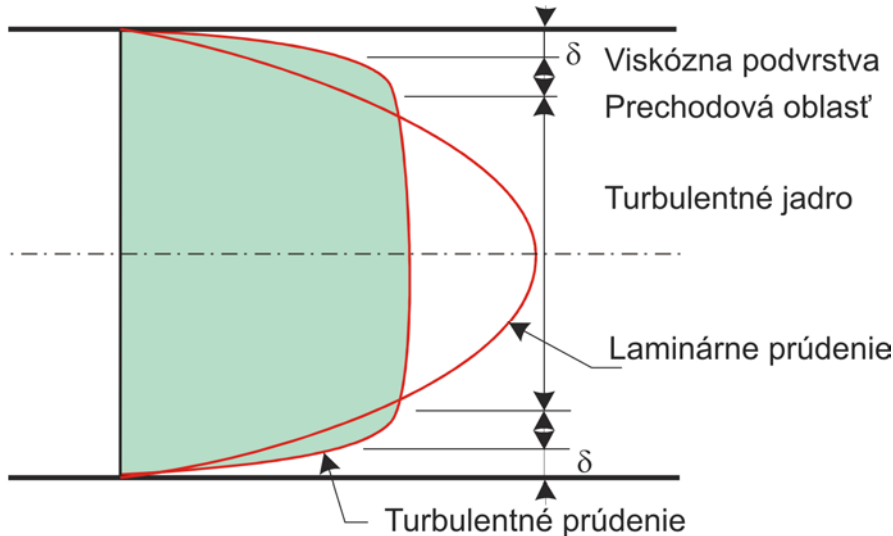




# Prúdenie v potrubí



- Turbulentné prúdenie



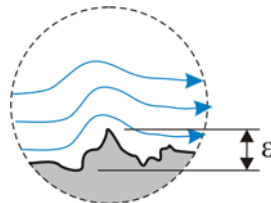
**Trecia rýchlosť'** – nie je to skutočná rýchlosť, ale fiktívna veličina pre výpočet turbulentnej rýchlosti.

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{1}{2} \sqrt{gdi}$$

$\tau_0$  – trecie napätie na stene potrubia,  
 $d$  – priemer potrubia,  
 $i$  – sklon tlakovej čiary

$\delta$  – hrúbka viskózneho podvrstvy (z experimentálnych meraní)  
 $\varepsilon$  – drsnosť steny

$$\delta = 11.8 \frac{v}{u^*}$$





# Prúdenie v potrubí

- Turbulentné prúdenie

- hydraulicky hladké potrubie..... $5\varepsilon < \delta$
- hydraulicky drsné potrubie..... $5\varepsilon > \delta$

- Maximálna rýchlosť (Nikuradse)

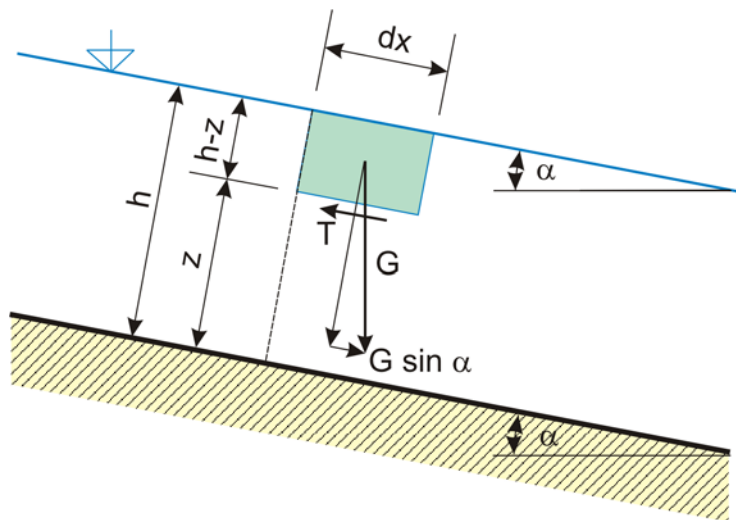
- hydraulicky hladké potrubie  $u_{\max} = u^* \left( 2.5 \ln \frac{du^*}{2\nu} + 5.5 \right)$

- hydraulicky drsné potrubie  $u_{\max} = u^* \left( 2.5 \ln \frac{d}{2\varepsilon} + 8.5 \right)$

- Priemerná rýchlosť – Chézyho rovnica

# Prúdenie v korytách

- Laminárne rovnomerné prúdenie – rovnaká hĺbka vody



$$G \sin \alpha - T = 0$$

$$G \sin \alpha = \rho g dx dy (h - z) \sin \alpha \cong \\ \cong \rho g dx dy (h - z) i$$

$$T = \tau dx dy = \mu \frac{du}{dz} dy dx$$

$$\rho g dx dy (h - z) i - \mu \frac{du}{dz} dx dy = 0$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{\rho g i}{\mu} (h - z) \Rightarrow u = \frac{\rho g i}{\mu} \int (h - z) dz + C$$

Integračná konštanta, musí byť opäť stanovená z okrajovej podmienky

# Prúdenie v korytách

- Laminárne rovnomerné prúdenie

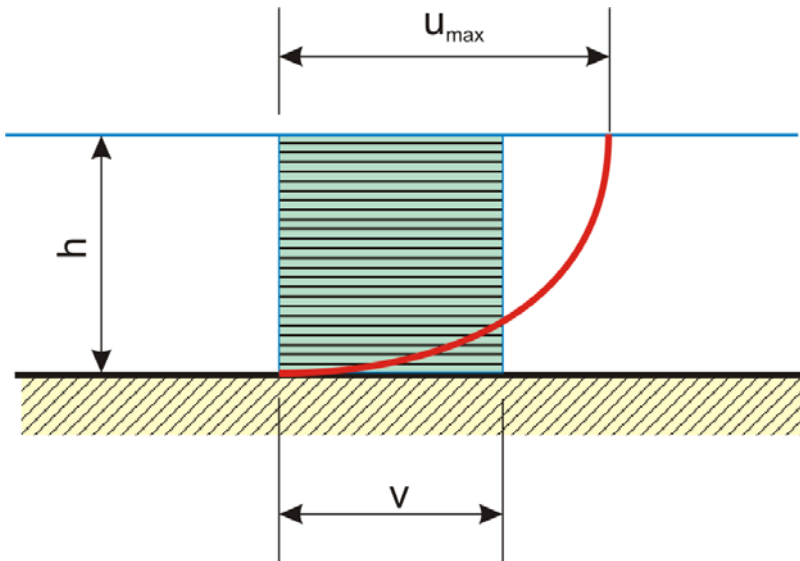
Okrajová podmienka  $u=0$   
pri dne koryta  $\Rightarrow C=0$

$$u = \frac{\rho g i}{\mu} \left( hz - \frac{z^2}{2} \right) + C$$

$$u = \frac{\rho g i}{\mu} \left( hz - \frac{z^2}{2} \right)$$

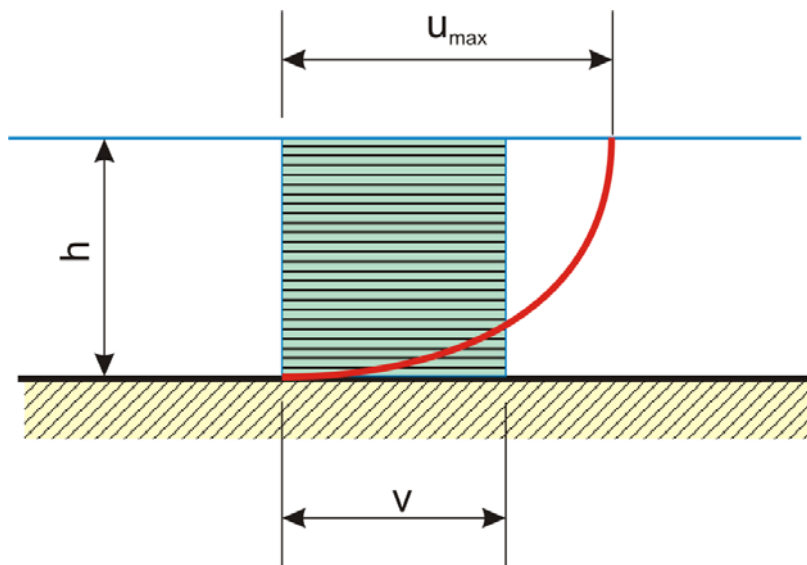
Maximálna rýchlosť – na hladine

$$u_{\max} = \frac{\rho g i}{2\mu} h^2$$



# Prúdenie v korytách

- Laminárne rovnomerné prúdenie



Priemerná rýchlosť

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{q}{h}$$

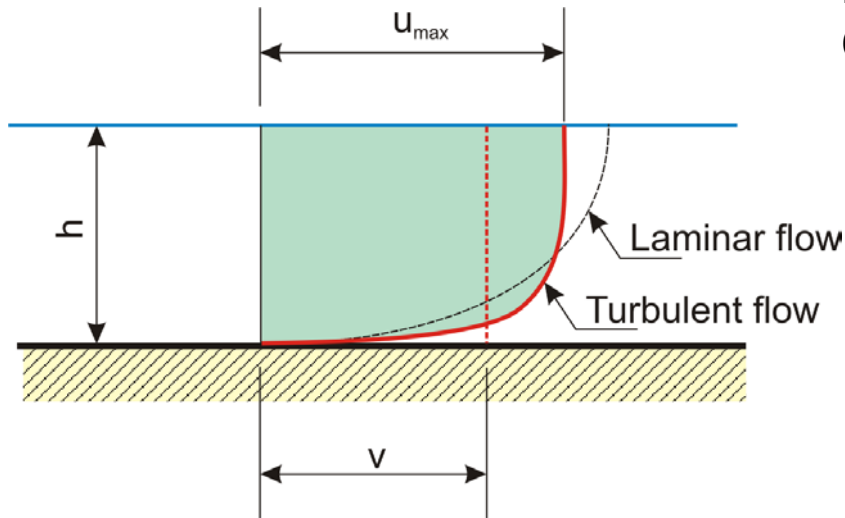
q – špecifický prietok (prietok na 1m šírky koryta)

$$v = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\rho g i}{\mu} \left( hz - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{\rho g i}{\mu} \left[ h \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right]_0^h$$

$$v = \frac{\rho g i}{3\mu} h^2 = \frac{2}{3} u_{\max}$$

# Prúdenie v korytách

- Turbulentné prúdenie



Priemerná rýchlosť turbulentného prúdenia  
**Chezyho rovnica:**

$$v = C \sqrt{Ri}$$

$C$  – Chezyho koeficient [ $m^{1/2}s^{-1}$ ]  
 $R$  – hydraulický polomer  
 $i$  – sklon hladiny (t.j. sklon dna)

Pre stanovenie  $C$  je veľa koeficientov rôznych autorov.

Manningov vzorec

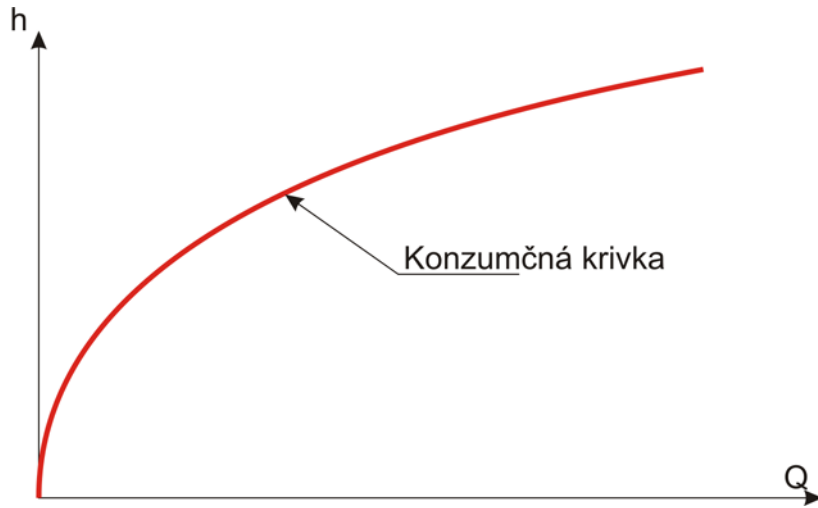
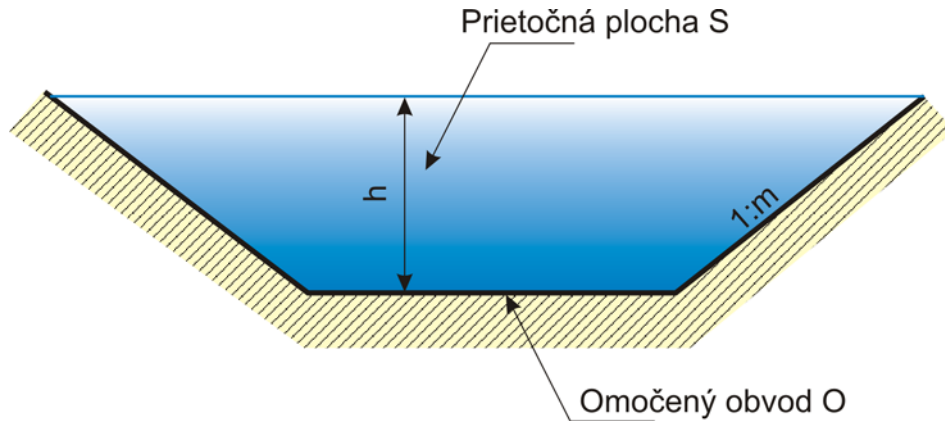
$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}$$

$n$  – koeficient drsnosti koryta

# Prúdenie v korytách



- Výpočet prietoku



Postup výpočtu:

1. Prietočná plocha  $S$
2. Omočený obvod  $O$

3. Hydraulický polomer  $R = \frac{S}{O}$

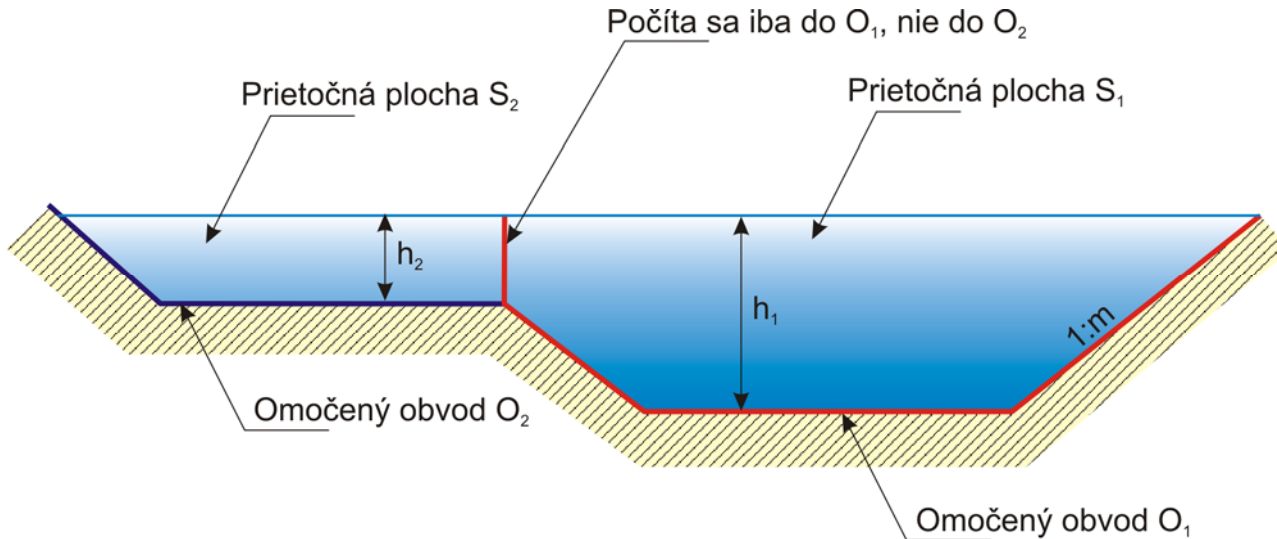
4. Chézyho koef.  $C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}$

5. Priemerná rýchlosť  $v = C \sqrt{Ri}$

6. Prietok  $Q = S.v$

# Prúdenie v korytách

- Prúdenie v zložitých prierezochoch



Musíme profil rozdeliť na časti a počítať  $Q$  oddelene po častiach.

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$